Problema 1 Dadas las retas:

$$r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \ \text{ y } \ s : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Determinar la posición que ocupan.

b) Calcular la distancia mínima que las separa.

c) Encontrar una recta perpendicular a ambas.

d) Si $P(-3, 0, 1)$ encontrar una recta que pasando por P corte a las dos rectas.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 1) \\ P_s(1, 1, 0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (2, 1, -1)$$

a)

$$\left| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

b)

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = 5; \quad |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| | = |(-1, 2, -5)| = \sqrt{30}$$

$$d = \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \ u$$

c) $\overrightarrow{u_t} = (-1, 2, 5)$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} -1 & -1 & x+1 \\ 2 & 2 & y \\ -5 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x + y + 2 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{rrc} -1 & 1 & x-1 \\ 2 & 3 & y-1 \\ -5 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 17x - 4y - 5z - 13 = 0$$

$$t : \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 17x - 4y - 5z - 13 = 0 \end{cases}$$

d) Tenemos $P(-3, 0, 1)$, $\overrightarrow{PP_r} = (2, 0, 0)$ y $\overrightarrow{PP_s} = (4, 1, -1)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x+1 \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y - 2z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x-1 \\ 1 & 3 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x - 5y + 11z + 1 = 0$$

$$h : \begin{cases} y - 2z + 2 = 0 \\ 4x - 5y + 11z + 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Sea el plano $\pi : 3x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

Se pide:

a) Calcular la ecuación del plano que sea perpendicular a π y contenga a r.

b) Calcular la proyección ortogonal de r sobre π.

c) El plano π corta a los ejes coordenados en tres puntos que, con el origen, forman un tetraedro. Calcular su volumen y la altura sobre la base formada por los tres puntos de corte.

Solución:

a)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - y + 2z - 5 = 0$$

b)

$$t : \begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

c) Corte con el eje OX: $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(1/3, 0, 0)$

Corte con el eje OY: $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, 1, 0)$

Corte con el eje OZ: $y = 0$ y $x = 0 \Longrightarrow A(0, 0, -1)$

Los vectores con el origen son:

$$\overrightarrow{OA} = (1/3, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, -1)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{18}\, u^3$$

Calculamos el área de la base para ello calculamos primero

$$\overrightarrow{BA} = (1/3, -1, 0); \quad \overrightarrow{BC} = (0, -1, -1)$$

$$S = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}\right| = |(1, 1/3, -1/3)| = \frac{\sqrt{11}}{6}\, u^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{11}}{11}\, u$$