

Problema 1 (7 puntos). Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}, \quad s : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

se pide:

- Estudiar la posición de ambas rectas.
- La distancia que las separa.
- Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(2, 1, 1)$.
- Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.
- Encontrar una recta que pasando por el punto P corte a ambas.
- Encontrar un plano paralelo a r y a s que contenga a P .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_s(0, -1, 1) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (0, -2, -1)$$

a)

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

b)

$$|\vec{u}_t| = |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = |(-1, -1, 1)| = \sqrt{3}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u$$

c)

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-1, -1, 1) \\ P_h = P(2, 1, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

d)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, -1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ -1 & -1 & y-1 \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies x+y+2z-5=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, -1, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_s(0, -1, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ -1 & 2 & y+1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+z-1=0$$

$$t : \begin{cases} x+y+2z-5=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

e)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P} = (2, 0, -1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-1 \\ -1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies x+y+2z-5=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_s P} = (2, 2, 0) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_s(0, -1, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 2 & 2 & y+1 \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x-y+3z-4=0$$

$$l : \begin{cases} x+y+2z-5=0 \\ x-y+3z-4=0 \end{cases}$$

f) $\vec{u}_\pi = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-1, -1, 1)$:

$$-x - y + z + \lambda = 0 \implies -2 - 1 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 2$$

$$\pi' : x + y - z - 2 = 0$$

Problema 2 (3 puntos). Sea el punto $P(3, -1, 2)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : x + y + 3z - 5 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Solución:

a) Seguiremos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $r \perp \pi / P \in r$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 1, 3) \\ P_r = P(3, -1, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π :

$$(3 + \lambda) + (-1 + \lambda) + 3(2 + 3\lambda) - 5 = 0 \implies \lambda = -\frac{3}{11}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 3/11 = 30/11 \\ y = -1 - 3/11 = -14/11 \\ z = 2 - 9/11 = 13/11 \end{cases} \implies P' \left(\frac{30}{11}, -\frac{14}{11}, \frac{13}{11} \right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'' :

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = \left(\frac{60}{11}, -\frac{28}{11}, \frac{26}{11} \right) - (3, -1, 2) = \left(\frac{27}{11}, -\frac{17}{11}, \frac{4}{11} \right)$$

b) Seguiremos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r/P \in \pi$:

$$2x + y + z + \lambda = 0 \implies 6 - 1 + 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = -7$$

$$\pi : 2x + y + z - 7 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(-1, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$2(-1 + 2\lambda) + (\lambda) + (\lambda) - 7 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 3 \\ y = 3/2 \\ z = 3/2 \end{cases} \implies P' \left(2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'' :

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = (4, 3, 3) - (3, -1, 2) = (1, 4, 1)$$