Problema 1 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} 2x & -y+ & z = 1 \\ x & - & 2z = 2 \end{cases} \qquad s : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

1. Comprobar que se cruzan.
2. Calcular la distancia que las separa.
3. Encontrar la recta t que es perpendicular a ambas.
4. Encontrar un plano π que pase por el origen, y otro π' que pase por el punto $A(2,0,1)$.
5. Encontrar el punto P' simétrico de $P(2,2,2)$ respecto al plano π' calculado anteriormente.
6. El plano π' corta a los ejes coordenados en tres puntos que junto con el origen forman un tetraedro. Calcular su volumen.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2,5,1), \quad P_r(0,-2,-1)$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,5,1) \\ P_r(0,-2,-1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,2) \\ P_s(-1,0,1) \end{cases}$$

1. Calculamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,2,2)$ y tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

   Luego las dos rectas se cruzan.

2.

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}| = |-8+3| = 5$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}| = |(9,-5,7)| = \sqrt{155}$$

$$d=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{5}{\sqrt{155}}=0,4016096644\,u$$

3.

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=(9,-5,7)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,5,1)\\ \overrightarrow{u_t}=(9,-5,7)\\ P_r(0,-2,-1)\end{array}\right.\qquad \pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{u_t}=(9,-5,7)\\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{rrl}2&9&x\\5&-5&y+2\\1&7&z+1\end{array}\right|=0\quad \pi_2:\left|\begin{array}{rrl}-1&9&x+1\\1&-5&y\\2&7&z-1\end{array}\right|=0$$

$$\pi_1: 8x-y-11z-13=0,\quad \pi_2: 17x+25y-4z+21=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{rrrr}8x- & y- & 11z- & 13=0\\ 17x+ & 25y- & 4z+ & 21=0\end{array}\right.$$

4.

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,5,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,1,2)\\ O(0,0,0)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{rrl}2&-1&x\\5&1&y\\1&2&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 9x-5y+7z=0$$

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,5,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,1,2)\\ A(2,0,1)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{rrl}2&-1&x-2\\5&1&y\\1&2&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 9x-5y+7z-25=0$$

5. Vamos a seguir tres pasos:

   (a) Vamos a calcular una recta perpendicular al plano π' y que pase por el punto $P(2,2,2)$

$$h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}=(9,-5,7)\\ P_h(2,2,2)\end{array}\right.\Longrightarrow h:\left\{\begin{array}{l}x=2+9\lambda\\ y=2-5\lambda\\ z=2+7\lambda\end{array}\right.$$

   (b) Calculamos el punto de corte entre h y π

$$9(2+9\lambda)-5(2-5\lambda)+7(2+7\lambda)-25=0\Longrightarrow \lambda=\frac{3}{155}$$

   y sustituyendo:

$$\left\{\begin{array}{l}x=2+\frac{27}{155}=\frac{337}{155}\\[2ex] y=2-\frac{15}{155}=\frac{295}{155}\\[2ex] z=2+\frac{21}{155}=\frac{331}{155}\end{array}\right.\Longrightarrow M\left(\frac{337}{155},\frac{295}{155},\frac{331}{155}\right)$$

(c) M será el punto medio entre P y su simétrico P':

$$M = \frac{P' + P}{2} \Longrightarrow P' = 2M + P = \left(\frac{984}{155}, \frac{900}{155}, \frac{972}{155}\right)$$

6. Tenemos el plano $\pi' : 9x - 5y + 7z - 25 = 0$ que cortará a los ejes en los puntos:

   Corte con el eje OX: $y = 0, \quad z = 0 \Longrightarrow A(25/9, 0, 0)$
   Corte con el eje OY: $x = 0, \quad z = 0 \Longrightarrow B(0, -5, 0)$
   Corte con el eje OZ: $x = 0, \quad y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 25/7)$

   Tenemos, por tanto, los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (25/9, 0, 0), \quad \overrightarrow{OA} = (0, -5, 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 25/7)$$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 25/9 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 25/7 \end{vmatrix}|$$

$$= \frac{1}{6}| - 49,60317460| = 8,267195767\ u^3$$