Problema 1 (2 puntos). Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto a la recta r de ecuación

$$r : x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Solución:

Se sigue el siguiente procedimiento:

- Se calcula un planoπ perpendicular a r que contenga al punto A:

  $$x+2y+2z+\lambda = 0 \Longrightarrow -3+2+12+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -11$$

  El plano es $\pi : x+2y+2z-11 = 0$

- Calculamos el punto de corte entre π y r:

  $$\left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -3+2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow (1+\lambda)+2(-3+2\lambda)+2(-1+2\lambda)-11 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

  luego el punto $A'(3,1,3)$.

- Tenemos:

  $$\frac{A+A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A'-A = 2(3,1,3)-(-3,1,6) = (9,1,0)$$

Problema 2 (3 puntos). Considera los puntos $A(1,0,-1)$ $B(2,1,0)$, y la recta r dada por $\left\{\begin{array}{l} x+y = 1 \\ x+z = 2 \end{array}\right.$

1. (1,5 punto). Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.

2. (1,5 punto). Determina si la recta que pasa por $P(1,2,1)$ y $Q(3,4,1)$ está contenida en dicho plano.

Solución:

1.
$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-1), \quad \overrightarrow{AB} = (1,1,1)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,-1) \\ \overrightarrow{AB} = (1,1,1) \\ A(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y-z-1=0$$

2. Sustituyo P en $\pi \Longrightarrow 2-1-1=0 \Longrightarrow P \in \pi$.

   Sustituyo Q en $\pi \Longrightarrow 4-1-1=2 \neq 0 \Longrightarrow P$ no pertenece a π.

   Luego la recta que une P y Q no está contenida en π.

Problema 3 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv \ x=y=z, \ \ r_2 \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}, \ \ r_3 \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

   con el plano $\pi \equiv 2x+3y+7z=24$.

2. (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \ \ r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

1. LLamamos A al punto intersección de π con r_1:

$$2x+3x+7x=24 \Longrightarrow x=2 \Longrightarrow A(2,2,2)$$

   LLamamos B al punto intersección de π con r_2:

$$2x=24 \Longrightarrow x=12 \Longrightarrow B(12,0,0)$$

LLamamos C al punto intersección de π con r_3:

$$3y = 24 \Longrightarrow y = 8 \Longrightarrow B(0,8,0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (2,2,2)\ \ \overrightarrow{OB} = (12,0,0)\ \ \overrightarrow{OC} = (0,8,0)$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}| = 32\,u^3$$

2. Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{r_4}} \times \overrightarrow{u_{r_5}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4,-3,-1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_4}} = (1,2,-2) \\ P_{r_4}(-1,5,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 8x+7y+11z-16 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_5}} = (2,3,-1) \\ P_{r_4}(0,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 3x+y+9z-8 = 0$$

La recta buscada será:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos).* Dada la recta

$$r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

encontrar los puntos de la recta que se encuentran a distancia 3 del punto $P(2,0,1)$

Solución:

Construimos la esfera de centro P y radio $r = 3$:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$$

Los puntos que buscamos serán los puntos de corte de esta esfera con la recta

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

Luego:

$$(2\lambda - 2)^2 + (1 + \lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3}, \ \ \lambda = 0$$

Si $\lambda = 0 \Longrightarrow P_1(0, 1, -1)$.

Si $\lambda = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.