

ANALISIS-ALGEBRA

NOMBRE: _____ GRUPO: _____

1. a. [1, 5 puntos] Calcula $\int \frac{1}{(x^2 - 2x)(x - 2)} dx$

b. [1 punto] Calcula $\int_0^1 x \cdot \ln(x + 1) dx$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

a. [1 punto] Estudia la derivabilidad de f

b. [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f.

c. [0,75 puntos] Calcula el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.

3. [2,5 puntos] De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

4. Dado el sistema de ecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} ax - y + 2z = 1 + a \\ x + ay - z = -1 \\ 3x + y + z = a \end{array} \right\}$$

a. [1,25 puntos] Estudia el sistema según los valores del parámetro a.

b. [1,25 puntos] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

SOLUCIÓN

$$1. \quad a. \quad \int \frac{1}{(x^2 - 2x)(x-2)} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{(x-2)} dx + \int \frac{C}{(x-2)^2} dx$$

$$1 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$\text{Para } x=0 \rightarrow 1 = 4A \rightarrow A = \frac{1}{4}; \text{ Para } x=2 \rightarrow 1 = 2x \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Para } x=1 \rightarrow 1 = A - B + C \rightarrow 1 = \frac{1}{4} - B + \frac{1}{2} \rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - 2x)(x-2)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x-2)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{2(x-2)} + C \end{aligned}$$

$$b. \quad \int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx \quad \text{Por partes: } \left. \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \\ dv = x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$\int x \cdot \ln(x+1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1) dx - \frac{1}{2} \ln|x+1| = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1|$$

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$2. \quad \text{Sea } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ la función definida por } f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

a. Estudia la derivabilidad de f

$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } 2 < x \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Continuidad: funciones polinómicas y continua en 0 y 2 (hallando los límites laterales y la función en el punto, coinciden)

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}, \text{ derivadas laterales en 0 y 2:}$$

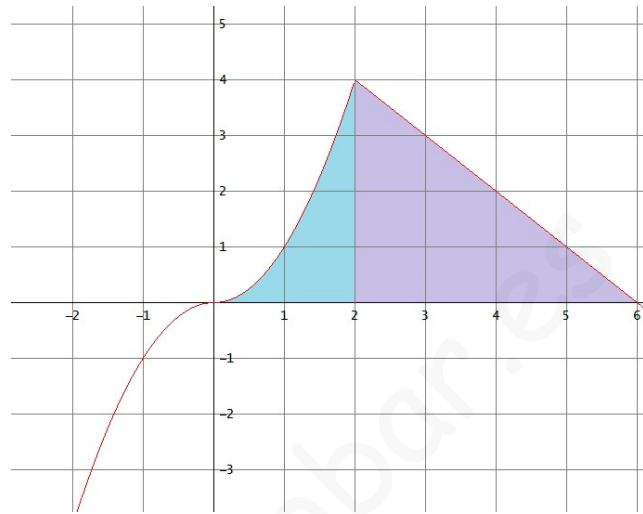
$$\begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases} \text{ derivable en } 0 \quad \begin{cases} f'(2^-) = 4 \\ f'(2^+) = -1 \end{cases} \text{ no derivable en } 2, \text{ derivable en } \mathbb{R} - \{2\}$$

b. Esboza la gráfica de f.

Dos trozos de parábolas
(una cóncava y otra convexa)
y una semirrecta.

El vértice de ambas
parábolas es (0,0) y la recta
corta al eje OX en x=6

La parábola y la recta se
cortan en x=2



c. Calcula el área de la región
acotada comprendida entre
la gráfica de f y el eje de
abscisas.

$$A = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 (6-x) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + \left. 6x - \frac{x^2}{2} \right|_2^6 = \frac{8}{3} + 36 - 18 - 12 + 2 = \frac{32}{3} u^2$$

3. De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

$$\text{Datos: } \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f(-2) = 0 \\ f''(0) = 0 \\ f'(2) = 9 \end{cases}, \text{ derivadas: } \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(-1) = 3a - b + c = 0 \\ f(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ f''(0) = 0 + 2b = 0 \rightarrow b = 0 \\ f'(2) = 12a + 4b + c = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + c = 0 \\ -8a - 2c + d = 0 \\ 12a + c = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + c = 0 \\ 12a + c = 9 \end{cases} \rightarrow 9a = 9$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ 3a + c = 0 \\ -8a - 2c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ -8 + 6 + d = 0 \end{cases} \rightarrow d = 2 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$4. \text{ Dado el sistema de ecuaciones } \left. \begin{array}{l} ax - y + 2z = 1 + a \\ x + ay - z = -1 \\ 3x + y + z = a \end{array} \right\}$$

a. Estudia el sistema según los valores del parámetro a .

$$\text{Matrices del sistema: } A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 1+a \\ 1 & a & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3 + 2 - 6a + a + 1 = a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$\text{Para } a = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2; \quad A^* \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r(A^*) = 2$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

$$\text{Para } a = 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2; \quad A^* \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow r(A^*) = 3$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$\text{Para } a = 2 \text{ Para } a \neq 2 \text{ y } a \neq 3 \rightarrow r(A) = 3; \quad r(A^*) = 3$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

b. Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

$$\text{Para } a = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2; \quad r(A^*) = 2, \text{ nos queda el sistema:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = -1 \\ 3x + y + z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow z = \lambda \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 - 2\lambda \\ x + 2y = -1 + \lambda \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 - \frac{3}{5}\lambda, \quad y = -1 + \frac{4}{5}\lambda$$