

Opción A

(Álgebra lineal. 3ª ev.)

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir el sistema
$$\begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 2 - m \\ (m + 2)x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$
, y resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

Como es un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas comenzamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}_{F_3=F_3-F_1} = \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(2-m) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m+2 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{C_1=C_1-C_3} = \\ &= (m-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ m-1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (m-2)(m-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -(m-2)^2(m-1) \end{aligned}$$

El determinante se anula para $m=1$ y $m=2 \Rightarrow$ si $m \neq 1$ y $m \neq 2$, $\text{Rang}(\bar{A}) = 4 > \text{Rang}(A) \Rightarrow$ sistema incompatible

Para $m=1$, $\text{Rang}(\bar{A}) < 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(\bar{A}) = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado}$$
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 0; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1$$

Para $m=2$, es un sistema homogéneo \Rightarrow siempre compatible

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(\bar{A}) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$
$$\begin{cases} 2x - 2y = -z \\ x + 2y = -z \end{cases} \Rightarrow 3x = -2z \Rightarrow x = -\frac{2}{3}z; y = -\frac{1}{6}z \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}\lambda \\ y = -\frac{1}{6}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$.

Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que $\det(A) = m$, calcula el valor de $\det(A + I)$ en función de m .

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = -A - I$$

$$A \in M_{n \times n}; \quad \det(A) = m; \quad A^3 = -A - I \Rightarrow A + I = -A^3; \quad |A + I| = |-A^3| = |-A| \cdot |A| \cdot |A| = (-1)^n \cdot |A|^3 = (-1)^n \cdot m^3$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Estudia el rango de la matriz A según los valores de los parámetros a y b .

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = b(a^3 - 3a + 2) = b(a-1)^2(a+2); \quad |A| = 0 \Rightarrow b(a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow \{b=0, a=1, a=-2\}$$

$$b \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}]{\text{también } \downarrow} = b \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_1 = C_1 + C_2 + C_3]{} = b \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = b(a-1)^2(a+2)$$

Si $b \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3$

Si $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A) = 1$ (puesto que A tiene tres filas iguales)

Si $a = -2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix}$, el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2$

Si $b = 0$, ($a \neq 1$), $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, el menor $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

- Razona para qué valores de k la matriz $B^t \cdot A^t$ tiene inversa y obténla en función de k .
- Resuelve la ecuación $(AB)^t \cdot X = I$, para $k = 0$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

apartado a)

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

$$(B^t \cdot A^t) \text{ tiene inversa} \Leftrightarrow |B^t \cdot A^t| \neq 0; |B^t \cdot A^t| = \begin{vmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = (-1+2k)(k+2) - 3k = 2k^2 - 2; |B^t \cdot A^t| = 0 \Rightarrow 2k^2 - 2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

entonces $(B^t \cdot A^t)$ tiene inversa cuando $k \neq 1$ y $k \neq -1$.

Calculemos ahora $(B^t \cdot A^t)^{-1}$; llamamos $M = \begin{pmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$, y sabemos que $|M| = 2k^2 - 2$

$$\begin{matrix} M_{11} = k+2 & M_{21} = -k \\ M_{12} = -3 & M_{22} = -1+2k \end{matrix} \Rightarrow M^{-1} = (B^t \cdot A^t)^{-1} = \frac{1}{2k^2 - 2} \begin{pmatrix} k+2 & -k \\ -3 & -1+2k \end{pmatrix}$$

apartado b)

Hay que resolver la ecuación $(A \cdot B)^t \cdot X = I \Rightarrow X = [(A \cdot B)^t]^{-1} \cdot I \Rightarrow X = [(A \cdot B)^t]^{-1}$ (para $k = 0$)

$$\text{si no nos hemos dado cuenta, calculamos } (A \cdot B)^t; A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2k & 3 \\ k & k+2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

y observamos que $(A \cdot B)^t = (B^t \cdot A^t)$ igualdad que es cierta siempre que existan los productos, entonces

$$X = [(A \cdot B)^t]^{-1} = (B^t \cdot A^t)^{-1} \text{ (para } k = 0) \Rightarrow X = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

también se puede calcular $(A \cdot B)^t$ (para $k = 0$) y encontrar "de nuevo" su inversa.

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discute y resuelve el sistema según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (\lambda+1)y + z = 0 \\ -x + \lambda y - z = 0 \end{cases}$$

Solución:

El sistema es homogéneo con lo que sabemos que será compatible para todo valor de λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & -(\lambda+1) & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & -(\lambda+1) & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \underset{F_2=F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1+4) = -(\lambda+3)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

si $\lambda \neq -3$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado \Rightarrow solución $\{x=0, y=0, z=0\}$

$$\text{si } \lambda = -3, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = -4z \\ x + 2y = -z \end{cases}, \quad 1^a + 2^a \Rightarrow 5x = -5z \Rightarrow x = -z; \quad y = 0 \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x = -\mu \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resuelve la ecuación matricial $B \cdot (2A + I) = A \cdot X \cdot A + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Tenemos la ecuación $B \cdot (2A + I) = A \cdot X \cdot A + B \Rightarrow 2B \cdot A + B = A \cdot X \cdot A + B \Rightarrow 2B \cdot A = A \cdot X \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot (2B \cdot A) \cdot A^{-1} = X$

entonces $X = A^{-1} \cdot (2B)$

Calculemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 1$$

$$\begin{matrix} A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 & A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 & A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \\ A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 & A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \end{matrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (2B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & x+1 & 7 & 0 \\ 3 & x^2-1 & 11 & 0 \\ 9 & x^3+1 & 37 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & x+1 & 7 \\ 3 & (x+1)(x-1) & 11 \\ 9 & (x+1)(x^2-x+1) & 37 \end{vmatrix} = -3(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & x-1 & 11 \\ 3 & x^2-x+1 & 37 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}}{=} = -3(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & x-2 & 4 \\ 0 & x^2-x-2 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(x+1) \begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ x^2-x-2 & 16 \end{vmatrix} = -12(x+1) \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x^2-x-2 & 4 \end{vmatrix} = -12(x+1)(4x-8-x^2+x+2) = -12(x+1)(-x^2+5x-6) = 12(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$12(x+1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \{x = -1, x = 2, x = 3\}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)Discutir y resolver, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + 3y + mz = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-2 \\ m & 3 & m \end{pmatrix}, \text{ buscamos posibles menores de orden 2 distintos de cero;}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 3-m=0 \Rightarrow m=3; \quad \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ m & m \end{vmatrix} \Rightarrow 3m-m^2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 3 & m \end{vmatrix} \Rightarrow 6-2m=0 \Rightarrow m=3$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-2 & 1 \\ m & 3 & m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\bar{A}) = 2$$

si $m \neq 3$, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminadosi $m = 3$, $\text{Rang}(A) = 1 \neq \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ sistema incompatibleresolvemos para $m \neq 3$

$$\begin{cases} x + y = 1 - (m-2)z \\ mx + 3y = 2 - mz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - (m-2)z}{3-m} = \frac{1 + (6-2m)z}{3-m} \\ y = \frac{1 - (m-2)z}{3-m} = \frac{(2-m) + (m^2-3m)z}{3-m} \end{cases} \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{1 + (6-2m)\lambda}{3-m} \\ y = \frac{(2-m) + (m^2-3m)\lambda}{3-m} \\ z = \lambda \end{cases}$$

1ª evaluación

Ejercicio 1.

Se considera la función $f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$.

- Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
- Encuentra los máximos y mínimos de $f(x)$.
- Calcula la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 2$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{1+x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases};$$

$f(x)$ está definida por dos ramas que son siempre continuas y derivables, puesto que son cociente de polinomios y $1+x^2 \neq 0$. Hay que analizar la continuidad y derivabilidad en $x=0$

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{1+x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0$$

$$\begin{cases} f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-h}{1+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+h^2} = -1 \\ f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{1+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+h^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=0$$

$f(x) \geq 0$, y $f(x) = 0$ en el punto $x=0 \Rightarrow$ por tanto en $(0,0)$ $f(x)$ tiene un mínimo, que no aparecerá al derivar ya que en $x=0$ la función no es derivable.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=-1 \text{ (es para valores } x < 0) \\ 1-x^2=0 \Rightarrow x=1 \text{ (es para valores } x > 0) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{en el punto } \left(-1, \frac{1}{2}\right) \text{ hay un máximo} \\ f''(1) < 0 \Rightarrow \text{en el punto } \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ hay un máximo} \end{cases}$$

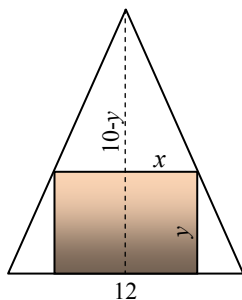
Para calcular la recta tangente necesitamos el punto de tangencia $(x_0, y_0) = \left(2, \frac{2}{5}\right)$ y la pendiente $m = f'(2) = -\frac{3}{25}$

$$r_{ig} \equiv y - \frac{2}{5} = -\frac{3}{25}(x-2) \Rightarrow r_{ig} \equiv y = \frac{-3x+16}{25}$$

Ejercicio 2.

En un triángulo isósceles de base 12 cm (correspondiente al lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados está sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales del triángulo. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Solución:



$$\text{Área del rectángulo} = 2xy$$

$$\text{tenemos la relación de semejanza } \frac{10-y}{x} = \frac{10}{6} \Rightarrow 60 - 6y = 10x \Rightarrow y = \frac{60-10x}{6}$$

$$\text{la función a maximizar es } A(x) = 2x \frac{60-10x}{6} \Rightarrow A(x) = \frac{60x-10x^2}{3}$$

$$A'(x) = \frac{60-20x}{3} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 20x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$A''(x) = -\frac{20}{3}, \quad A''(3) = -\frac{20}{3} < 0 \Rightarrow \text{para } x=3, A(x) \text{ es máxima.}$$

Dimensiones del rectángulo: base = 6 cm ; altura = 5 cm

Ejercicio 3.

a. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$

b. Dada la función $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -2$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = A \quad (\text{indeterminación } 1^\infty)$$

$$\ln A = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}{\cos x} = (L' \text{ H\^o}pital) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{\pi} - \text{sen } x}{-\text{sen } x} = \frac{\frac{2}{\pi} - 1}{-1} = \frac{\pi - 2}{\pi} \Rightarrow A = e^{\frac{\pi-2}{\pi}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\frac{\pi-2}{\pi}}$$

b)

$f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$ por ser producto de funciones continuas y derivables \Rightarrow cumple

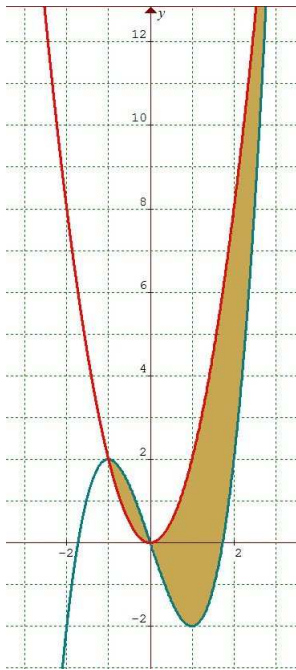
$$\text{las hipótesis del teorema del valor medio } \Rightarrow \exists \alpha \in (1, 2) \text{ tal que } f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{2 \cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}}{1} = -2$$

2ª evaluación

Ejercicio 1.

Esboza las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = 2x^2$, y calcula el área del recinto limitado por ambas curvas.

Solución:



$$f(x) = x^3 - 3x$$

$Dom f = \mathbb{R}$; corta al eje OX en los puntos $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$; al ser polinómica no tiene asíntotas.

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \Rightarrow$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$f''(x) = 6x$, $\begin{cases} f''(1) > 0 \Rightarrow \text{en el punto } (1, -2) \text{ hay un mínimo} \\ f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{en el punto } (-1, 2) \text{ hay un máximo} \end{cases}$; en $(0, 0)$ hay punto de inflexión.

$g(x) = 2x^2$ es una parábola que tiene su vértice en $(0, 0)$

Cortes entre ambas curvas $f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x = 2x^2 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow \{x = 0, x = -1, x = 3\}$
se cortan en los puntos $(-1, 2)$, $(0, 0)$ y $(3, 18)$

El área pedida será $A = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx + \int_0^3 (-x^3 + 2x^2 + 3x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \left[0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right) \right] + \left[\left(-\frac{81}{4} + \frac{54}{3} + \frac{27}{2} \right) - 0 \right] = \frac{71}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

- Calcula el valor de $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \cdot \text{sen}(x^2) dx$.
- Calcula la primitiva de la función $f(x) = \ln(1 - x^2)$ cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \cdot \text{sen}(x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} 2x \cdot (-\text{sen}(x^2)) dx = -\frac{1}{2} [\cos(x^2)]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2} [\cos(2\pi) - \cos(\pi)] = -\frac{1}{2} [1 - (-1)] = -1$$

$$F(x) = \int \ln(1-x^2) dx = x \cdot \ln(1-x^2) - \int x \cdot \frac{-2x}{1-x^2} dx = x \cdot \ln(1-x^2) + 2 \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = x \cdot \ln(1-x^2) + 2 \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1-x^2) \Rightarrow du = \frac{-2x}{1-x^2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right.$$

$$= x \cdot \ln(1-x^2) - 2 \int dx + 2 \int \frac{1}{1-x^2} dx = x \cdot \ln(1-x^2) - 2 \int dx + \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{-1}{1-x} dx = x \cdot \ln(1-x^2) - 2x + \ln|1+x| - \ln|1-x| + C$$

$$\left\{ \frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{(B-A)x + A+B}{1-x^2} \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x} \right.$$

$$F(x) = x \cdot \ln(1-x^2) - 2x + \ln|1+x| - \ln|1-x| + C \quad ; \quad \text{como sabemos que } F(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

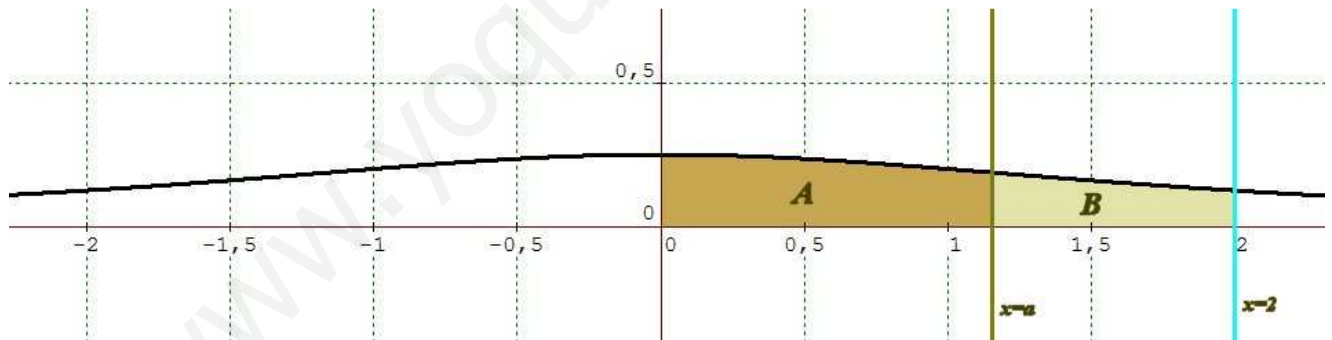
para que exista $\ln(1-x^2) \Rightarrow -1 < x < 1$, entonces podemos quitar los valores absolutos y nos queda:

$$F(x) = x \cdot \ln(1-x^2) - 2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 1$$

Ejercicio 3.

Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por el eje OX , el eje OY , la recta $x = 2$ y la curva $y = \frac{1}{4+x^2}$. Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha), tales que el área de A sea el doble que la de B .

Solución:



$$A = 2B \Rightarrow \int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2} dx = 2 \int_{\alpha}^2 \frac{1}{4+x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{2}{4} \int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + C$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2} dx = 2 \int_{\alpha}^2 \frac{1}{4+x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{2} \left[\arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]_0^{\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]_{\alpha}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \arctg(1) - \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$