

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Halla la matriz X que satisface la siguiente ecuación: $A \cdot X \cdot B + C = D$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \in M_{2 \times 3}, \text{ por tanto } X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b-c & c \\ -a+d & -b+e+c-f & -c+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ igualando las matrices obtenemos el sistema}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - c = -1 \\ c = -1 \\ -a + d = 1 \\ -b + e + c - f = -1 \\ -c + f = 3 \end{cases} \text{ y resolviéndolo nos queda que } X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Otra forma de resolver la ecuación matricial, muy interesante cuando las matrices que intervienen en el producto no tienen tantos ceros, es la siguiente:

$$A \cdot X \cdot B + C = D \Rightarrow A \cdot X \cdot B = D - C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D - C) \cdot B^{-1}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot (D - C) \cdot B^{-1} \text{ y calculando las inversas de } A \text{ y } B \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, dedúzcase cuándo A **no** tiene inversa.

A no tiene inversa cuando su determinante es igual a cero, por tanto desarrollemos ese determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot x^3 - y \cdot y^3 = x^4 - y^4$$

$$x^4 - y^4 = 0 \Rightarrow (x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y) \cdot (x + y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

Entonces A no tiene inversa cuando $x = y$ o $x = -y$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

- Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; calcula el valor de $|A^2|$, $|2AA^t|$, $|(A^t)^{-1}|$ y $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix}$

* $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 1 \cdot 1 = 1$

* $|2A \cdot A^t| = |2A| \cdot |A^t| = 2^3 \cdot |A| \cdot |A| = 2^3 \cdot 1 \cdot 1 = 8$ (A es una matriz 3×3)

Como $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

* $|(A^t)^{-1}| = \frac{1}{|A^t|} = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$

* $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ b & 1 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & a+c \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & a+c \\ 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3-C_1}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

- Sin desarrollar, probar que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+1 & 8-1 & 9+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea $A = I - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$, donde I es la matriz unidad. Comprueba que A^2 es proporcional a A y deduce la expresión general de A^n .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/8 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} \cdot A \Rightarrow A^2 \text{ es proporcional a } A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/8 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 1/16 & -1/8 \end{pmatrix}; \text{ también } A^3 = A^2 \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A^2 = \frac{1}{4} \cdot A$$

del mismo modo $A^4 = A^3 \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A \cdot A = \frac{1}{4} \cdot A^2 = \frac{1}{8} \cdot A \Rightarrow A^n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot A$ entonces

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/2^{n-1} & -1/2^{n-2} \\ 1/2^{n+1} & -1/2^n \end{pmatrix}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

- Calcula el siguiente determinante de orden n :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 = C_1 - C_n \\ C_2 = C_2 - C_n \\ C_3 = C_3 - C_n \\ \dots \\ C_{n-1} = C_{n-1} - C_n \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

$$= (1-n) \cdot (2-n) \cdot (3-n) \cdots (n-2-n) \cdot (n-1-n) \cdot n = n \cdot (1-n) \cdot (2-n) \cdot (3-n) \cdots (-2) \cdot (-1) = (-1)^{n-1} \cdot n!$$

- Demostrar que si A es una matriz 3×3 tal que $A^t = -A$, entonces $|A| = 0$. ¿Y si A es una matriz $n \times n$, se verifica lo anterior?

Sabemos que se cumple $|A| = |A^t|$; como $A \in M_{3 \times 3} \Rightarrow |-A| = (-1)^3 \cdot |A| = -|A|$, entonces

$$A^t = -A \Rightarrow |A^t| = |-A| \Rightarrow |A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$$

Si $A \in M_{n \times n} \Rightarrow |-A| = (-1)^n |A| \Rightarrow$ si n es impar $|A| = 0$, si n es par no se puede asegurar que $|A| = 0$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los valores del parámetro λ para los que las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son invertibles, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Calcula la inversa de las matrices en función de } \lambda.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}; \quad (AB) \text{ es invertible} \Leftrightarrow |AB| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+2\lambda - (3+2\lambda) \cdot (1-\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2; \quad 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

(AB) tiene inversa si $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $\lambda \neq -2$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot [\text{adj}(AB)]^t \quad (AB)_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \quad (AB)_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (3+2\lambda)$$

$$(AB)_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (1-\lambda) \quad (AB)_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (1+2\lambda)$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2\lambda^2 + 3\lambda - 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3-2\lambda \\ \lambda-1 & 1+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda-3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad (BA) \text{ es invertible} \Leftrightarrow |BA| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & \lambda-3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -16\lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 6\lambda - 4\lambda^2 + 12\lambda + 8\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$|BA| = 0$, independientemente del valor de $\lambda \Rightarrow (BA)$ no tiene inversa $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} \stackrel{F_4=F_4-4F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3x \end{vmatrix} = (3-3x) \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_3=C_3-C_1 \\ C_2=C_2-C_1}}{=} (3-3x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-2 & 0 \\ 3 & 2 & x-3 \end{vmatrix} = (3-3x)(x-2)(x-3)$$

$$(3-3x)(x-2)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $AB = -BA$.

$$\left. \begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b-4c \\ 2a & 2b-3c \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2b & -4a-3b \\ 2c & -3c \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} AB = -BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a & 3b-4c \\ 2a & 2b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-2b & 4a+3b \\ -2c & 3c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = -3a - 2b \\ 3b - 4c = 4a + 3b \\ 2a = -2c \\ 2b - 3c = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = -a \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & -3a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$