Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)=2x^3-6x^2+4$ en su punto de inflexión.

Calculamos el punto de inflexión de $f(x)=2x^3-6x^2+4$

$f'(x)=6x^2-12x$

$f''(x)=12x-12\ ;\ f''(x)=0 \Rightarrow 12x-12=0 \Rightarrow x=1$

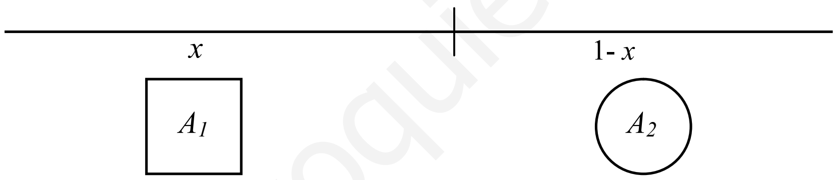
$f'''(x)=12 \Rightarrow f'''(1)\neq 0 \Rightarrow$ *en* $x=1,\ f(x)$ *tiene su punto de inflexión.*

Punto de tangencia $(1,f(1)) \Rightarrow (1,0)$. *La pendiente de la recta tangente a* $f(x)$ *en ese punto será* $m=f'(1) \Rightarrow m=-6$

La ecuación de la recta pedida es $y-0=-6(x-1) \Rightarrow y=-6x+6$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se divide una cuerda de longitud 1 en dos partes, no necesariamente iguales, para construir un cuadrado y una circunferencia. Probar que de todas las posibilidades, la que encierra un área total mínima surge cuando el radio del círculo es la mitad que el lado del cuadrado.



$$A_1=\left(\frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow A_1=\frac{x^2}{16}\ ;\ \text{en el círculo se cumple } 2\pi r=1-x \Rightarrow r=\frac{1-x}{2\pi} \Rightarrow A_2=\pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow A_2=\frac{(1-x)^2}{4\pi}$$

El área total será una función en x: $A(x)=A_1+A_2 \Rightarrow A(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(1-x)^2}{4\pi}$

buscamos el mínimo de esta función, $A'(x)=\frac{x}{8}-\frac{1-x}{2\pi}\ ;\ A'(x)=0 \Rightarrow \frac{x}{8}-\frac{1-x}{2\pi}=0 \Rightarrow x=\frac{4}{\pi+4}$

comprobamos que es un mínimo, $A''(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi} \Rightarrow A''\left(\frac{4}{\pi+4}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi}>0$

entonces el área total es mínima cuando $x=\frac{4}{\pi+4}$ *y el lado del cuadrado es* $l=\frac{x}{4} \Rightarrow l=\frac{1}{\pi+4}$

por otra parte el radio del círculo es $r=\frac{1-x}{2\pi} \Rightarrow r=\frac{1-\frac{4}{\pi+4}}{2\pi} \Rightarrow r=\frac{1}{2(\pi+4)}$ *y se cumple que* $r=\frac{l}{2}$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Prueba que la función $f(x)=\dfrac{3x+1}{3-\cos x}$ alcanza el valor 2 en un único punto de su dominio.

$f(x)=\dfrac{3x+1}{3-\cos x}$ *es una función continua en el intervalo* $[0,\pi]$ *por ser cociente de funciones continuas y* $3-\cos x\neq 0$

como $f(0)=\dfrac{1}{2}<2$ *y* $f(\pi)=\dfrac{3\pi+1}{4}>2$, *aplicando la propiedad de Darboux tenemos que* $f(x)$ *toma todos los valores comprendidos entre* $\dfrac{1}{2}$ *y* $\dfrac{3\pi+1}{4}$ *al menos una vez en el intervalo* $(0,\pi)\Rightarrow f(x)=2$ *en* $(0,\pi)$.

Veamos que ocurre en un único punto, entonces la ecuación $\dfrac{3x+1}{3-\cos x}=2\Rightarrow 2\cos x+3x-5=0$ *sólo tiene una solución.*
Supongamos que $2\cos x+3x-5=0$ *tiene dos soluciones,* x_1 *y* x_2 $(x_1<x_2)$; *definimos la función* $g(x)=2\cos x+3x-5$
$g(x)$ *es continua en* $[x_1,x_2]$, *derivable en* (x_1,x_2) *y* $g(x_1)=g(x_2)$ *ya que en ambos puntos* $g(x)=0\Rightarrow$ *estamos en las condiciones del teorema de Rolle* $\Rightarrow \exists\ c\in(x_1,x_2)$ *tal que* $g'(c)=0$

pero $g'(x)=-2senx+3$ *y* $g'(x)=0\Rightarrow -2senx+3=0\Rightarrow senx\neq\dfrac{3}{2}$ *con lo que llegamos a una contradicción.*

Por todo lo anterior la ecuación $\dfrac{3x+1}{3-\cos x}=2$ *sólo tiene una solución y queda demostrado.*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que: $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(0)=3$, $f'(1)=4$.
Se pide:

- Calcular $g'(0)$, siendo $g(x)=f(x+f(0))$. (1 punto)
- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$. (2 puntos)

$f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(0)=3$, $f'(1)=4$

$$g(x)=f(x+f(0))\Rightarrow g(x)=f(x+1)\Rightarrow g'(x)=f'(x+1)\Rightarrow g'(0)=f'(0+1)=f'(1)\Rightarrow g'(0)=4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\left(indet.\ \frac{0}{0}\ y\ aplicamos\ L'Hôpital\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4f(x)\cdot f'(x)-f'(x+1)}{e^x}=\frac{4\cdot 1\cdot 3-4}{e^0}=8$$

www.yoquieroaprobar.es

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(x)=x^2 sen(x-4)+17$. Demuestra que la función derivada $f'(x)$ posee al menos una raíz real en el intervalo $(0\ ,\ 4)$.

$f(x)=x^2sen(x-4)+17$ es una función continua en el intervalo $[0,4]$ y derivable en $(0,4)$ por ser producto y suma de funciones continuas y derivables y además $f(0)=f(4)=17$ con lo que estamos en las condiciones del teorema de Rolle $\Rightarrow \exists\ x_0 \in (0,4)$ tal que $f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x)$ posee al menos una raíz real en $(0,4)$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula los límites siguientes:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,x\cdot(1-sen\,x)}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,x - sen^2 x}{\cos^2 x} = \left(indet.\ \frac{0}{0}\ ,\ L'Hôpital\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2sen\,x\cdot\cos x}{-2\cos x\cdot sen\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot(1-2sen\,x)}{-2\cos x\cdot sen\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2sen\,x)}{-2sen\,x} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} = \left(indet.\ \infty^0\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} = A \Rightarrow \ln A = \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} = \lim_{x\to 0} tg\,x\cdot\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{cotg\,x} = \left(indet.\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ L'Hôp.\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cancel{1}/x^2}\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{\frac{-1}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2sen^2 x}{x} = \left(indet.\ \frac{0}{0}\ ,\ L'Hôp.\right) = \lim_{x\to 0}\frac{4sen\,x\cdot\cos x}{1} = 0 \Rightarrow A = e^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) = \left(indet.\ \infty-\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1$$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ una función que cumple $f(1)=0$, $f'(0)=2$, y tiene dos extremos relativos para $x=1$ y $x=2$.

- Determinar $a, b, c\ y\ d$.
- ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$\begin{cases} f(1)=0 \Rightarrow a+b+c+d=0 \\ f'(0)=2 \Rightarrow c=2 \\ f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+d=-2 \\ 3a+2b=-2 \\ 12a+4b=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\begin{cases} -6a-4b=4 \\ 12a+4b=-2 \end{cases}}{6a=2} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=2 \\ d=-\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Veamos si los extremos relativos que están en $x=1$ y $x=2$ son máximos o mínimos

$f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(x)=2x-3$;

$f''(1)=-1<0 \Rightarrow$ *en* $x=1$ *máximo* / $f''(2)=1>0 \Rightarrow$ *en* $x=2$ *mínimo.*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función definida del modo siguiente: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & si\ x\le 0 \\ -x^2+ax+b & si\ x>0 \end{cases}$.

- Halla los valores de $a\ y\ b$ para que la función cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-3,2]$.
- Con los valores obtenidos, halla los puntos de la curva $y=f(x)$ en los que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A=(-3,f(-3))$ y $B=(2,f(2))$.

Para que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange debe ser continua en $[-3,2]$ y derivable en $(-3,2)$.
$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en $x=0$. Vamos a imponer que sea continua en ese punto.

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $f(0)=0^2+4\cdot 0+3 \Rightarrow f(0)=3$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+4x+3\right)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^2+ax+b\right)=b \end{cases} \Rightarrow b=3$$

www.yoquieroaprobar.es

$f(x)$ *es derivable en todo* $\mathbb{R}$, *salvo quizás en* $x=0$. *Vamos a imponer que sea derivable en ese punto.*

$f'_-(0)=f'_+(0)$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)^2+4(0+h)+3-3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0^-}(h+4)=4$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(0+h)^2+a(0+h)+3-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2+ah}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}(-h+a)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0^+}(-h+a)=a$$

entonces $a=4$

Como $f(x)$ *cumple las hipótesis del teorema de Lagrange* $\Rightarrow \exists\ x_0\in(-3,2)\ /\ f'(x_0)=\dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}$

en esos puntos la recta tangente es paralela a la recta que une los puntos $(-3,f(-3))$ *y* $(2,f(2))$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3 & si\ \ x\le 0\\ -x^2+4x+3 & si\ \ x>0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x+4 & si\ \ x\le 0\\ -2x+4 & si\ \ x>0\end{cases}$$

$$f'(x_0)=\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}\Rightarrow f'(x_0)=\frac{7-0}{5}=\frac{7}{5}\Rightarrow\begin{cases}2x_0+4=\dfrac{7}{5}\ \Rightarrow\ x_0=-\dfrac{13}{10}\\ -2x_0+4=\dfrac{7}{5}\ \Rightarrow\ x_0=\dfrac{13}{10}\end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es