

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$$

$$b) \int \frac{x}{x^4 + 16} dx$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 3e^x + 2} \cdot e^x dx = \int \frac{t^2}{t^2 - 3t + 2} dt = \int \left(1 + \frac{3t-2}{t^2 - 3t + 2} \right) dt = \int dt + \int \frac{3t-2}{t^2 - 3t + 2} dt =$$

cambio \uparrow : $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$; *dividiendo* \uparrow

$$* = \int dt + \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{4}{t-2} \right) dt = \int dt - \int \frac{1}{t-1} dt + 4 \int \frac{1}{t-2} dt = t - \ln|t-1| + 4 \ln|t-2| = e^x - \ln|e^x - 1| + 4 \ln|e^x - 2|$$

deshaciendo el cambio \uparrow

$$* \frac{3t-2}{t^2 - 3t + 2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2) + B(t-1)}{t^2 - 3t + 2} \Rightarrow 3t - 2 = A(t-2) + B(t-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t=2 \Rightarrow 4 = B \\ \text{si } t=1 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^4 + 16} dx = \int \frac{x}{16 \left(1 + \frac{x^4}{16} \right)} dx = \frac{1}{16} \int \frac{x}{1 + \left(\frac{x^2}{4} \right)^2} dx = \frac{1}{8} \int \frac{\frac{x}{2}}{1 + \left(\frac{x^2}{4} \right)^2} dx = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{4} \right) + C$$

\uparrow tiene todo el aspecto de una integral del tipo arcotangente

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 4 puntos)

Esboza la gráfica de la función: $f(x) = x \ln x$, y calcula el área del recinto plano encerrado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = e$.

Comenzamos representando la función:

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow \operatorname{Dom} f = (0, +\infty)$$

$$\text{Cortes con eje OX: } x \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = (L' \text{ H\^o}pital) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x) = +\infty$$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x ; f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

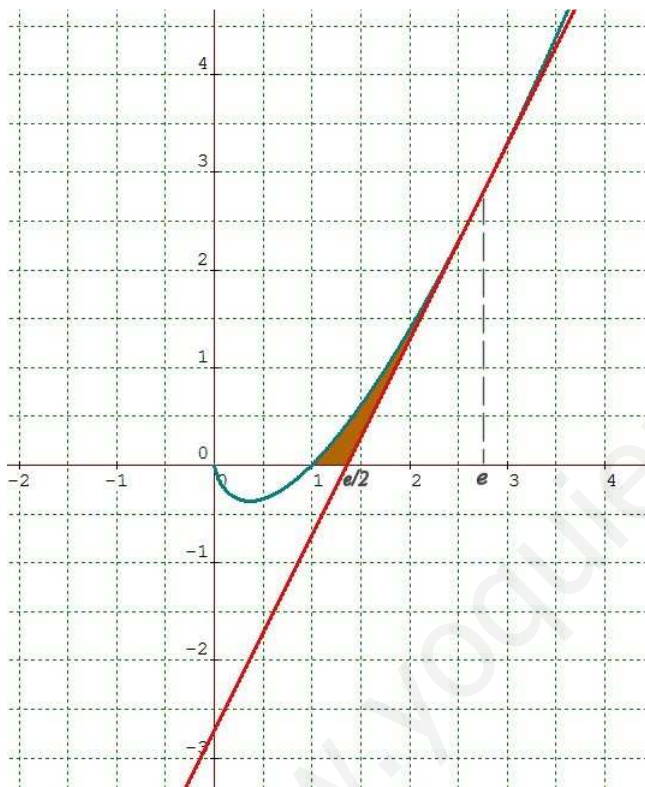
$$f''(x) = \frac{1}{x} ; f''\left(\frac{1}{e}\right) > 0 \Rightarrow \text{en el punto } \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right) \text{ la función tiene un mínimo.}$$

No hay puntos de inflexión.

Calculamos la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = e$

$$m = f'(e) = 1 + \ln e ; m = 2. \text{ Punto de tangencia } (e, e) \Rightarrow r_{tg} \equiv y - e = 2(x - e) \Rightarrow r_{tg} \equiv y = 2x - e$$

Dibujamos la función y la recta tangente y coloreamos la región de la que nos piden el área.



La función $f(x)$ y la recta $y = 2x - e$ se cortan en $x = e$

$$\text{Corte de la recta con eje } OX : 2x - e = 0 \Rightarrow x = \frac{e}{2}$$

Entonces el área de la región coloreada será :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e x \ln x \, dx - \int_{e/2}^e (2x - e) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e - \left[x^2 - ex \right]_{e/2}^e = \\ &= \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right] - \left[e^2 - e^2 - \frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{2} \right] = \frac{1}{4} \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x \, dx \Rightarrow v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 1,5 puntos)

¿Es cierto que $1 + \sin^2 x$ y $\frac{-\cos 2x}{2}$ son primitivas de una misma función? ¿De cuál?

Para que $F(x) = 1 + \sin^2 x$ y $G(x) = \frac{-\cos 2x}{2}$ sean primitivas de una misma función, debe cumplirse $F'(x) = G'(x)$

$$\left. \begin{array}{l} F'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \\ G'(x) = \frac{1}{2} (\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x \end{array} \right\} \Rightarrow F'(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) \text{ y } G(x) \text{ son primitivas de la función } f(x) = \sin 2x$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 1,5 puntos)

Calcula: $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2t - 2 \operatorname{arctg}(t) = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg}\sqrt{x}$$

\nwarrow cambio: $x = t^2$; $dx = 2t dt$

Entonces: $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \left[2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]_0^3 = (2\sqrt{3} - 2 \operatorname{arctg}\sqrt{3}) - (0 - 0) = 2\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{3}$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina la función $f(x)$, sabiendo que pasa por el punto $(1, -2)$ y que $f'(x) = x \cos(1 - x^2)$

La función $f(x)$ será una primitiva de $f'(x)$

$$\int x \cos(1 - x^2) dx = -\frac{1}{2} \int -2x \cos(1 - x^2) dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(1 - x^2) + C$$

$$\operatorname{sen}(1 - x^2) \stackrel{d}{\int} -2x \cos(1 - x^2) dx$$

por tanto $f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(1 - x^2) + C$ y como sabemos que f pasa por $(1, -2) \Rightarrow f(1) = -2$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(0) + C = -2 \Rightarrow C = -2 \quad \text{y} \quad f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(1 - x^2) - 2$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, hallar el área limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Comenzamos representando la gráfica de la función f :

$f(x)$ es una función definida a trozos que es continua.

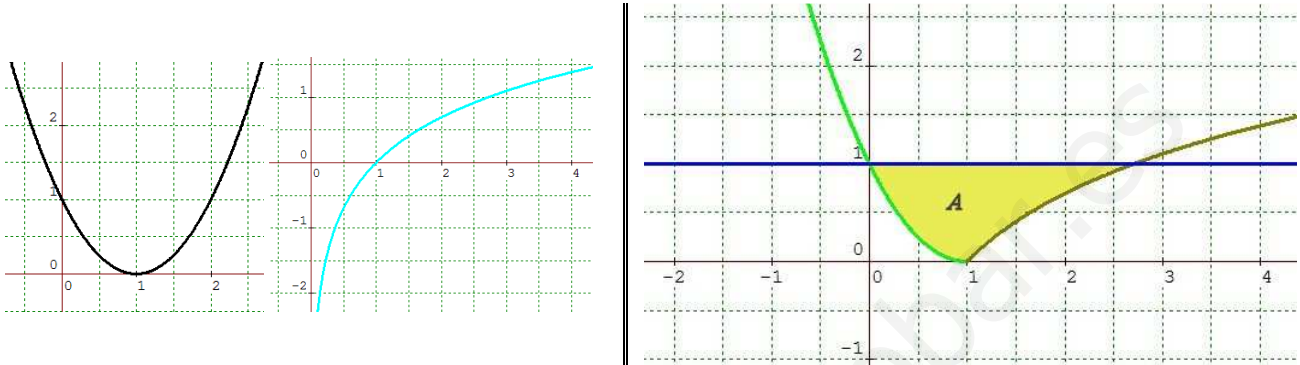
* en el intervalo $(-\infty, 1]$ tenemos la parábola $y = (x-1)^2$, que tiene su vértice en el punto $(1, 0)$

$$y' = 2(x-1) \Rightarrow y' = 0; \quad 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

* en el intervalo $(1, +\infty)$ tenemos la función logarítmica $y = \ln x$, que tiene asíntota vertical $x = 0$, y pasa por los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)$$

La recta $y = 1$ que limita la región es una paralela al eje OX que pasa por $(0,1)$



El área A , de la región pedida será:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^e 1 dx - \int_0^1 (x-1)^2 dx - \int_1^e \ln x dx = [x]_0^e - \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 - [x \ln x - x]_1^e = \\ &= [e-0] - \left[0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] - [(e-e) - (0-1)] = e - \frac{4}{3} \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el valor de a , ($a > 0$) para que el área del recinto limitado por la curva $y = x^3 - ax$ y el eje OX sea 8 unidades cuadradas.

La curva $y = x^3 - ax$ tiene dominio \mathbb{R} ; corta a los ejes en los puntos $(0,0)$; $(-\sqrt{a}, 0)$; $(\sqrt{a}, 0)$.

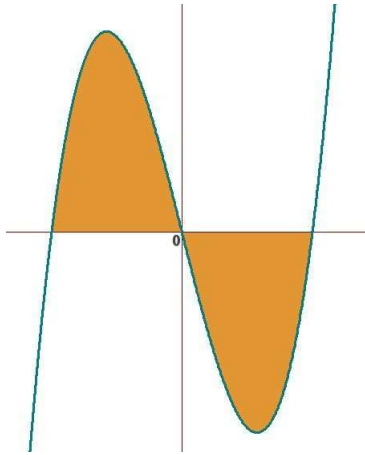
Es simétrica con respecto del origen de coordenadas: $f(-x) = (-x)^3 - a(-x) = -x^3 + ax = -f(x)$

$$y' = 3x^2 - a; \quad y' = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$y'' = 6x \Rightarrow \text{en } x = \sqrt{\frac{a}{3}} \text{ hay un mínimo y en } x = -\sqrt{\frac{a}{3}} \text{ hay un máximo.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - ax) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - ax) = +\infty$$

Con todo esto ya podemos esbozar la curva, y coloreamos el área que debe valer 8 unidades.



$$8 = \int_{-\sqrt{a}}^0 (x^3 - ax) dx - \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - ax) dx \Rightarrow \text{tambi\u00e9n}$$

$$\Rightarrow 4 = \int_{-\sqrt{a}}^0 (x^3 - ax) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} \right]_{-\sqrt{a}}^0 \Rightarrow 4 = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}$$

$$16 = -a^2 + 2a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

Ejercicio 4. (Puntuaci\u00f3n m\u00e1xima: 3 puntos)

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{x^2 - 2x}{e^x} dx$

b) $\int \frac{4x^3 + 2x - 1}{2x + 1} dx$

$$\int \frac{x^2 - 2x}{e^x} dx = \int (x^2 - 2x) e^{-x} dx = -(x^2 - 2x) e^{-x} + \int (2x - 2) e^{-x} dx = -(x^2 - 2x) e^{-x} + [-(2x - 2) e^{-x} + \int 2e^{-x} dx] =$$

Por partes $\uparrow \begin{cases} u = x^2 - 2x \Rightarrow du = (2x - 2) dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$ \uparrow otra vez por partes $\begin{cases} u = 2x - 2 \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$

$$= -(x^2 - 2x) e^{-x} - (2x - 2) e^{-x} - 2e^{-x} = e^{-x} (-x^2 + 2x - 2x + 2 - 2) = -x^2 e^{-x} + C$$

$$\int \frac{4x^3 + 2x - 1}{2x + 1} dx = \int \left(2x^2 - x + \frac{3}{2} + \frac{-5/2}{2x + 1} \right) dx = 2 \int x^2 dx - \int x dx + \frac{3}{2} \int dx - \frac{5}{4} \int \frac{2}{2x + 1} dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{5}{4} \ln|2x + 1| + C$$

\uparrow Dividimos y obtenemos: $D = 4x^3 + 2x - 1$; $d = 2x + 1$; $c = 2x^2 - x + \frac{3}{2}$; $r = -\frac{5}{2}$.

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$