

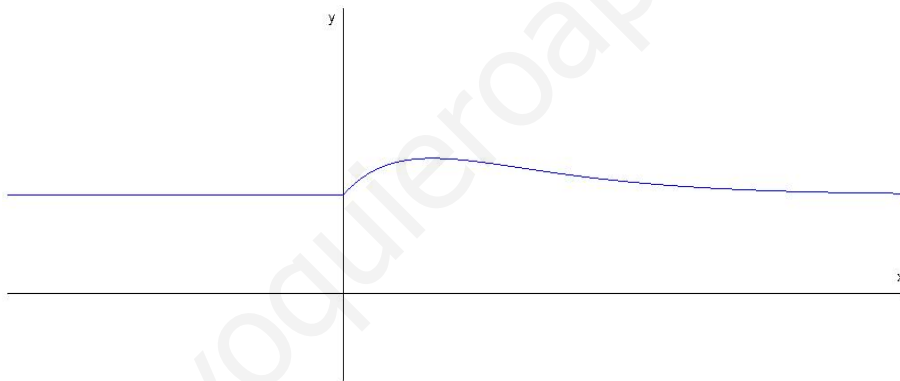
Problema 1 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en este caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.
- Calcular, en función de a la integral $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Solución:



- Continuidad en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + xe^{-x}) = 1$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$ cuando $a = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} - xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 1$ luego no es derivable en $x = 0$.

En resumen, para $a = 1$ la función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$b) \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 a dx + \int_0^1 (1 + xe^{-x}) dx = ax]_{-1}^0 + x - e^{-x}(x+1)]_0^1 = -a + 2(1 - e^{-1})$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$

- a) Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.
- b) Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Solución:

$$a) f(x) = e^{-x} - x, \quad f'(x) = -e^{-x} - 1, \quad f''(x) = e^{-x}$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad P'(x) = 2ax + b, \quad P''(x) = 2a$$

$$\begin{cases} P(0) = f(0) = 1 \implies c = 1 \\ P'(0) = f'(0) = -2 \implies b = -2 \\ P''(0) = f''(0) = 1 \implies 2a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \implies P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

- b)
 - La función es derivable en R y se cumple: $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \forall x \in R \implies$ la función es decreciente en R .
 - La función es continua en R y además:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x) = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} - x) = -\infty$$

Por el teorema de Bolzano $\exists c \in R / f(c) = 0$

- Por las conclusiones anteriores se concluye que ese punto c es único.

Problema 3 Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- b) Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0, 1]$ y calcular $\int_0^1 (x-2)f(x) dx$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

b) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

$$\int_0^1 (x-2)f(x) dx = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{\sqrt{(x^2 - 4x + 3)^3}}{3} \Big|_0^1 = -\sqrt{3}$$

Problema 4 Calcular

a) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

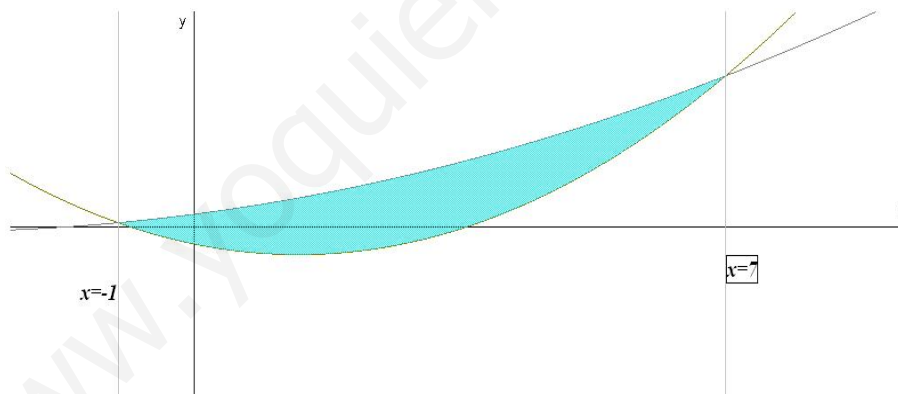
Solución:

a) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2} = \frac{\ln|2x+1|}{4} - \frac{\ln|2x-1|}{4} \Big|_1^{3/2} = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -0,1$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{2}$

Problema 5 Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 4x^2 - 11x - 12$ y $g(x) = x^2 + 7x + 9$.

Solución:



$$f(x) = g(x) \implies 4x^2 - 11x - 12 = x^2 + 7x + 9 \implies x = -1, x = 7$$

Tendremos que calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 7.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (3x^2 - 18x - 21) dx = x^3 - 9x^2 - 21x$$

$$S_1 = \int_{-1}^7 (f(x) - g(x)) dx = F(7) - F(-1) = -256$$

$$S = |S_1| = 256 \text{ u}^2$$