Problema 1 Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-4}$. Se pide:

1. Hallar los intervalos donde esta función es creciente y donde es decreciente.
2. Hallar las asíntotas.
3. Hacer una gráfica de la función.
4. Área encerrada entre la función, el eje de abcisas y las rectas $x=0$ y $x=1$.

(Islas Baleares 2005)

Solución:

1.

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0\Longrightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece	decrece

Como $Dom(f)=R-\{-2,2\}$ tendremos:

Crece: $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

Decrece: $(0,\infty)$

Esta claro que, en el punto $(0,3/4)$ hay un máximo, ya que en él la gráfica pasa de crecer a decrecer.

2. Asíntotas:

- **Verticales:**

$x=2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^2-3}{x^2-4}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x^2-3}{x^2-4}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

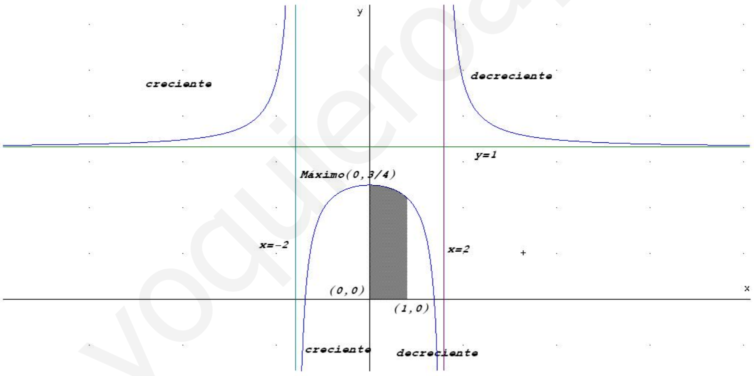
$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{x^2-4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay, ya que hemos encontrado asíntotas horizontales.

3. Representación



4.

$$F(x) = \int \frac{x^2-3}{x^2-4}\,dx = x + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

Voy a resolver la integral. Como el grado del poliniomio del numerador es igual que el del denominador divimos y nos queda

$$\frac{x^2-3}{x^2-4} = 1 + \frac{1}{x^2-4}$$

Esta última fracción la descomponemos en dos

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = (x+2)A + (x-2)B \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \Longrightarrow 1/4 = A \\ x = -2 \Longrightarrow -1/4 = B \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x^2-3}{x^2-4}\, dx = \int x\, dx + \int \frac{1/4}{x-2}\, dx + \int \frac{-1/4}{x+2}\, dx = x + \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| =$$

$$= x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

Luego

$$F(x) = x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

$$S = |F(1)| + |F(0)| = (1 - \frac{\ln 3}{4}) - (0) = 1 - \frac{\ln 3}{4} = 0.7253469278\ u^2$$