Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Halla a y b sabiendo que es continua la función f : R → R definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. [2,5 puntos] Sea la función f: R → R dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la grafica de f en el punto de abscisa x = 1 tiene pendiente 3.

Ejercicio 3.- Sea *f*: R → R la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$.
a) [**0,75 puntos**] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.
b) [**0,75 puntos**] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = -x-2, determinando los puntos de corte de ambas graficas.
c) [**1 punto**] Calcula el área del recinto anterior.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/2} x.\operatorname{sen}(2x)dx$.

Opción B

Ejercicio 1.- [**2,5 puntos**] Dada la función f definida, para x ≠ 0, por $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ determina las asíntotas de su grafica. Efectúa un esbozo de la misma situándolas respecto a ella.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Ejercicio 3.- Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por: $f(x) = 4-3|x|$ y $g(x) = x^2$.
a) [**1 punto**] Esboza las graficas de f y g. Determina sus puntos de corte.
b) [**1,5 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por las graficas de f y g.

Ejercicio 4.- Sea f: (0, +∞) → R definida por f(x) = 1 + ln(x), siendo ln la función logaritmo neperiano.
a) [**1 punto**] Comprueba que la recta de ecuación $y = 1+\frac{x}{e}$ es la recta tangente a la grafica de *f* en el punto de abscisa *x = e.*
b) [**1,5 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por la grafica de *f* , el eje de abscisa y la recta tangente del apartado a).

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Halla a y b sabiendo que es continua la función f : R → R definida como

f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solución:

Según el enunciado f es continua en R, por lo tanto lo es en x = 0, y cumple que f(0) = $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

b = f(0) = $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} = \dfrac{0 + \cos(0) - ae^0}{0^2} = \dfrac{1 - a}{0}$

Como el límite existe y es finito, al ser f continua en x = 0, el numerador ha de ser cero, para tener una indeterminación es decir 1 - a = 0 ⇒ **a = 1**.

Como ambas funciones f y g son continuas en el intervalo [a -δ, a + δ] y derivables en el intervalo (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y tales que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que dice que se verifica que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \cos(x) - e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \operatorname{sen}(x) - e^x}{2x} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}(0) - e^0}{2.0} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos(x) - e^x}{2} = \dfrac{-\cos(0) - e^0}{2} = \dfrac{-1-1}{2} = -1$

Como f(0) = $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, resulta que **b = -1**. Queda la función:

f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) - e^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Ejercicio 2. [2,5 puntos] Sea la función f: R → R dada por

f(x) = $\begin{cases} e^x(x^2 + ax) & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{bx^2 + c}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la grafica de f en el punto de abscisa x = 1 tiene pendiente 3.

Solución:

a) Según el enunciado la función f es derivable por lo tanto ha de ser continua en R, en especial en x = 0. Obliguemos a que lo sea.

f(0) = $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x(x^2 + ax) = e^0.0 = 1.0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{bx^2 + c}{x+1} = \dfrac{0+c}{0+1} = c$

Igualando los límites laterales obtenemos que **c = 0**.

Obliguemos a que sea derivable en x = 0:

$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x(x^2+ax) - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x.e^x(x+a)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x(x+a) = e^0.(0+a) = 1.a = a$

$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{bx^2}{x+1} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{bx^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{bx}{x+1} = \dfrac{b.0}{0+1} = 0$

Igualando las derivadas laterales obtenemos que **a = 0**.

Utilizando la interpretación geométrica de la derivada sabemos que f'(1) es la pendiente de la recta tangente en ese punto y su valor es 3. Como x = 1 pertenece a la rama de la derecha y su derivada es:

$f'(x) = \dfrac{2b.(x+1) - bx^2}{(x+1)^2}$

Sustituimos valores y obtenemos que:

$\dfrac{2b.(1+1) - b.1^2}{(1+1)^2} = 3 \Rightarrow \dfrac{3b}{4} = 3 \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow$ **b** $= \dfrac{12}{3} =$ **4**

Obteniendo la función:

f(x) = $\begin{cases} \mathbf{x^2.e^x \text{ si } x \leq 0} \\ \mathbf{\frac{4x^2}{x+1} \quad \text{ si } x > 0} \end{cases}$

Ejercicio 3.- Sea *f*: R → R la función definida por f(x) = x^3-4x.

a) [0,75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

b) [0,75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = -x-2, determinando los puntos de corte de ambas graficas.

c) [1 punto] Calcula el área del recinto anterior.

Solución:

a) Para hallar la ecuación de la recta tangente, t, a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1 utilizamos la ecuación punto-pendiente y-f(1) = f'(1)(x-1). Sustituimos los valores de la función y la derivada.

$f(x) = x^3-4x \Rightarrow f(1) = 1^3-4.1 = -3$.

$f'(x) = 3x^2-4 \Rightarrow f'(1) = 3.1^2-4 = -1$.

Sustituimos valores y la recta tangente pedida es:

$y+3 = -1(x-1) = -x+1 \Rightarrow$ t: **y = -x-2**.

b) Para esbozar el recinto determinado representamos las funciones y hallamos sus puntos de corte.

- La gráfica de f es la de una función polinómica de grado 3, por lo tanto presenta ramas parabólicas en el infinito. Para esbozarla hallamos los puntos de corte con el eje OX

  Para x = 0, el punto es (0,f(0)) = (0,0)

  Para y = 0 $\Rightarrow 0 = x^3-4x = x(x^2-4) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$.

  Los puntos son (-2,0),(0,0) y(2,0).

- La recta y = -x-2 es una recta que corta a los ejes en los puntos (-2, 0) y (0,-2).

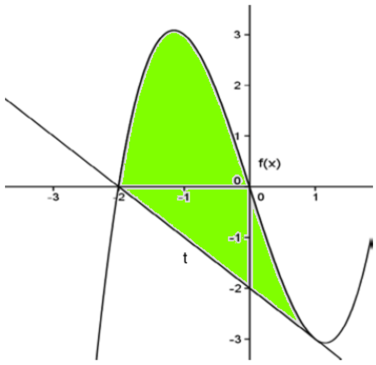
Determinamos los puntos de corte de ambas graficas igualando sus ecuaciones:

$x^3-4x = -x-2 \Rightarrow x^3-3x+2 = 0$. Ecuación de tercer grado que resolvemos aplicando la regla de Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Los puntos de corte son x = -2 y x = 1.

Un esbozo de las graficas y del recinto limitado por ambas es el de la figura adjunta:



c) El área del recinto anterior es:

A = $\int_{-2}^{1}[x^3-4x-(-x-2]dx = \int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$ =

= $\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{16}{4}-\frac{12}{2}-4\right)\right] = \frac{27}{4}$ u²

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/2}\mathbf{x.sen(2x)dx}$.

Solución:

Resolvemos primero la integral indefinida I = $\int x.\text{sen}(2x)dx$ que realizamos por partes siendo:

u = x ⇒ du = dx

dv = sen(2x) ⇒ v = $-\frac{\cos(2x)}{2}$

I = $x.\frac{[-\cos(2x)]}{2} - \int\frac{-\cos(2x)}{2}dx = \frac{-x.\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int\cos(2x).dx = \frac{-x.\cos(2x)}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{4}$ + k

Aplicamos la regla de Barrow:

$\int_0^{\pi/2}x.\text{sen}(2x)dx = \left[\frac{-x.\cos(2x)}{2}+\frac{\text{sen}(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \left[\left(\frac{-\pi/2.\cos(\pi)}{2}+\frac{\text{sen}(\pi)}{4}\right)-\left(\frac{0.\cos(0)}{2}+\frac{\text{sen}(0)}{4}\right)\right]$ =

= $\frac{-1}{2}\left(\frac{-\pi}{2}\right)(-1) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

Opción B

Ejercicio 1. [2,5 puntos] Dada la función f definida, para x ≠ 0, por f(x) = $\frac{e^x+1}{e^x-1}$ determina las asíntotas de su grafica. Efectúa un esbozo de la misma situándolas respecto a ella.

Solución

- La recta x = a es una asíntota vertical de la función f si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Como es un cociente de funciones debemos buscar los valores que anulen el denominador. Como:

  $e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

  Debemos ver si x = 0 es una asíntota vertical, tomando los límites laterales de la función:

  $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

  $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

  Por lo tanto la recta **x = 0** es una asíntota vertical de f.

- La recta y = b es una asíntota horizontal de la función f si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

  Consideramos el límite a la izquierda:

  $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$

  Por lo tanto la recta **y = -1** es una asíntota horizontal de f hacia la izquierda.

Consideramos el límite a la derecha:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Indeterminación que resolvemos aplicando la regla de L'Hôpital, que indica que si dos funciones f y g son continuas en el intervalo [a -δ, a + δ] y derivables en el intervalo (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y tales que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ se verifica que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se extiende a los casos en que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

Por lo tanto la recta **y = 1** es una asíntota horizontal de f hacia la derecha.

Hallemos la posición de la función respecto de las asíntotas horizontales mediante el estudio de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - b]$ a izquierda y derecha respectivamente:

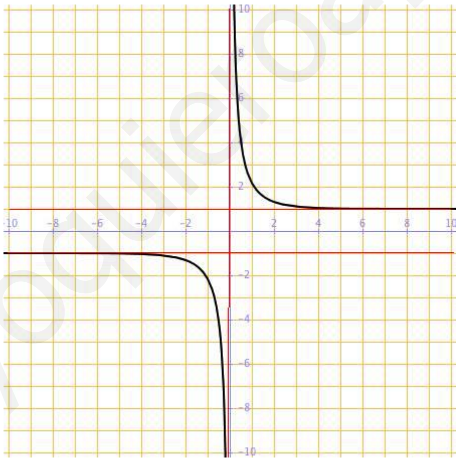
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x+1}{e^x-1} + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x+1+e^x-1}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2e^x}{e^x-1}\right) = 0^-$

La función se acerca por debajo de la asíntota horizontal a la izquierda.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+1}{e^x-1} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+1-e^x+1}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{e^x-1}\right) = 0^+$

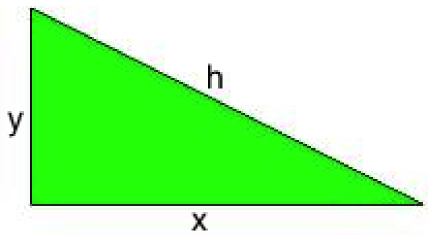
La función se acerca por encima de la asíntota horizontal a la derecha.

- La recta y= mx + n es una asíntota oblicua de la función f si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (mx + n)] = 0$, donde m = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y n = $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx]$. Esta función no presenta asíntota oblicua ya que presenta asíntota horizontal.



Ejercicio 2.- [2,5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Solución:



Es un problema de optimización. Consideramos que x e y son las dimensiones del triángulo (x será la base e y la altura). Por el enunciado del problema debemos optimizar:
h(x, y) = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Sujeta a la relación que nos da el área:

A = 8 $\Rightarrow$ 8 = $\frac{xy}{2}$

De donde despejamos y = $\frac{16}{x}$

Sustituyendo en la expresión de h:

h(x) = $\sqrt{x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2}$ = $\sqrt{x^2+\frac{256}{x^2}}$ = $\sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}}$

Como optimizar $\sqrt{f(x)}$ es igual que optimizar su radicando intentamos minimizar la expresión f(x) = $\frac{x^4+256}{x^2}$

Para minimizar la expresión hallamos su primera derivada f'(x):

f'(x) = $\frac{4x^3.x^2-(x^4+256).2x}{x^4}$ = $\frac{2x^4-512}{x^3}$

y resolvemos f'(x) = 0 que serán los posibles máximos o mínimos.

f'(x) = 0 $\Rightarrow$ $2x^4$-512 = 0 $\Rightarrow$ x^4-256 = 0 $\Rightarrow$ x = $\sqrt[4]{256}$ = 4

Luego el posible mínimo es x = 4.

Hallemos P''(x) y comprobemos dichos valores para averiguar si es máximo o mínimo:

f''(x) = $\frac{2x^4+1536}{x^4}$

Como f''(4) > 0, **x = 4 es un mínimo relativo**.

El valor de la hipotenusa es:

h(4) = $\sqrt{4^2+\left(\frac{16}{4}\right)^2}$ = $\sqrt{16+16}$ = $4\sqrt{2}$ cm.

Ejercicio 3.- Sean f: R $\rightarrow$ R y g: R $\rightarrow$ R las funciones definidas por: f(x) = 4-3|x| y g(x) = x^2 .

a) [1 punto] Esboza las graficas de f y g. Determina sus puntos de corte.

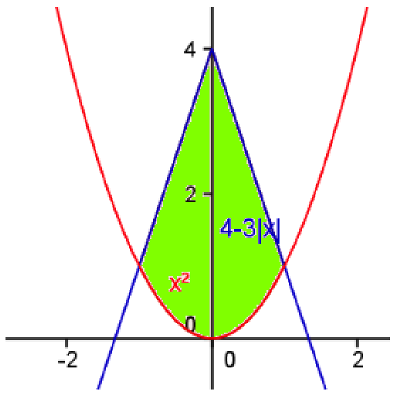
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las graficas de f y g.

Solución:

a) Sabemos que la función valor absoluto es |x| = $\begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$ por lo tanto f(x) = 4−3|x| = $\begin{cases} 4+3x, & x<0 \\ 4-3x, & x\geq 0 \end{cases}$

- La gráfica de f es la de dos rectas con pendientes 1 y -1 respectivamente y 4 de ordenada en el origen.
- La gráfica de g es la de una parábola convexa con vértice en (0,0).

Un esbozo de sus graficas es la de la figura adjunta:



Los **puntos de corte** los calculamos observando que la figura presenta simetría axial respecto al eje de ordenadas, por lo tanto igualamos la rama de la izquierda de f con g para x < 0, y la rama de la derecha de f con g para x > 0:

- Para x < 0: $x^2 = 4+3x \Rightarrow x^2-3x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$
  Como es la rama de la izquierda únicamente nos interesa la solución negativa y tenemos **x = -1**.

- Para x > 0: $x^2 = 4-3x \Rightarrow x^2+3x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$
  Como es la rama de la derecha únicamente nos interesa la solución positiva y tenemos **x = 1**.

b) Por la simetría axial de las funciones consideradas el área del recinto limitado por las graficas de f y g es el doble de uno de los lazos considerados:

$A = 2.\int_0^1(4-3x-x^2)dx = 2.\left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2.\left[\left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)-0\right] = 2.\frac{13}{6} = \frac{13}{3}\,u^2$

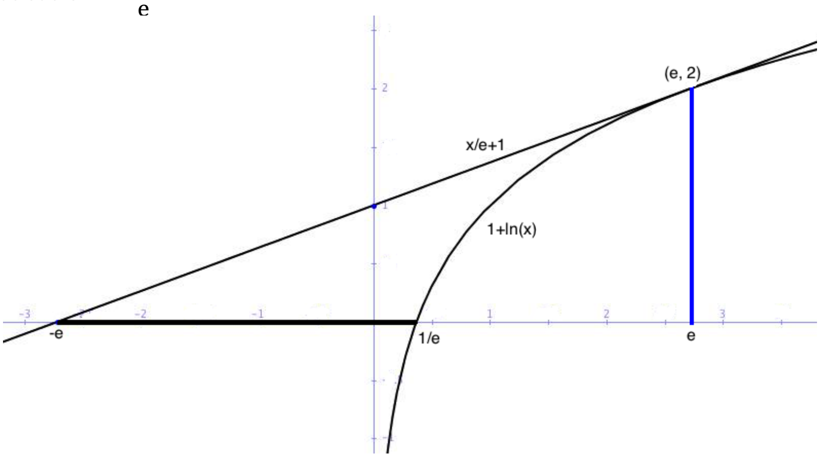
Ejercicio 4.- Sea f: (0, +∞) → R definida por f(x) = 1 + ln(x), siendo ln la función logaritmo neperiano.
a) [1 punto] Comprueba que la recta de ecuación y = 1+$\frac{x}{e}$ es la recta tangente a la grafica de *f* en el punto de abscisa *x = e*.
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la grafica de *f* , el eje de abscisa y la recta tangente del apartado a).

Solución:
a) La ecuación de la recta tangente en x = e en forma punto-pendiente es:
$y-f(e) = f'(e)(x-e)$

Tomamos valores en la función y la derivada:
$f(x) = 1+Ln(x) \Rightarrow f(e) = 1+Ln(e) = 1+1 = 2$
$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$

Sustituyendo valores:
$y-2 = \frac{1}{e}(x-e) \Rightarrow y-2 = \frac{x}{e}-1 \Rightarrow$ t(x): $\mathbf{y = \frac{x}{e}+1}$
como queríamos demostrar.

b) Nos piden el área de la figura adjunta. Está comprendida entre:
- La recta tangente hallada en el apartado anterior que pasa por los puntos (0, 1) y (-e, 0)
- La gráfica de f(x) = 1+ln(x) que es igual a la de ln(x) desplazada una unidad hacia arriba que corta al eje de abscisas en x = $\frac{1}{e}$.



Observando la figura el área pedida es la del triángulo rectángulo determinado por los puntos (-e, 0), (e, 0) y (e,2) menos la del triángulo curvo determinado la curva 1+ln(x), la recta x=e y el eje de abscisas:

Área = área triangulo – $\int_{1/e}^{e}[1+\ln(x)]dx$

$A_1 = \frac{B.h}{2} = \frac{2e.2}{2} = 2e\ u^2$

$A_2 = \int_{1/e}^{e}[1+\ln(x)]dx = \int_{1/e}^{e} dx + \int_{1/e}^{e}\ln(x)\,dx$

Como la segunda es una integral por partes, donde:

$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$\int \ln(x)\,dx = x.\ln(x) - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x.\ln|x| - x$

$A_2 = \int_{1/e}^{e} dx + \int_{1/e}^{e}\ln(x)\,dx = [x.\ln|x|]_{1/e}^{e} = e.\ln|e| - \frac{1}{e}\ln\left|\frac{1}{e}\right| = e - \frac{1}{e}[\ln(1)-\ln(e)] = e + \frac{1}{e}\ u^2$

Finalmente

Área = $A_1 - A_2 = 2e - \left(e+\frac{1}{e}\right) = \left(\mathbf{e}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}}\right)\mathbf{u^2}$