

1. Límites y continuidad

Ejercicio 1. Prueba que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto. Si c es la abscisa de ese punto, calcula la parte entera de c .

Solución:

Las dos gráficas se cortan en la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = e^{-x} \end{cases}$$

Resolviendo por igualación resulta la ecuación:

$$\ln x = e^{-x} \quad \text{o bien} \quad \ln x - e^{-x} = 0$$

Demostremos que esta ecuación tiene solución por medio del teorema de Bolzano:

◇ Sea la función

$$F(x) = \ln x - e^{-x}$$

continua para $x > 0$ por ser diferencia de funciones continuas.

◇ Busquemos dos puntos en que la función tome valores de signo opuesto:

$$F(1) = \ln 1 - e^{-1} = 0 - e^{-1} < 0$$

$$F(2) = \ln 2 - e^{-2} \simeq 0,558 > 0$$

◇ De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (1, 2)$ en el que $F(c) = 0$. El número c es la abscisa del punto de corte entre las dos curvas.

Puesto que c está en el intervalo $(1, 2)$, su parte entera es igual a 1.

Ejercicio 2. Hallar el valor de λ y $f(0)$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\text{sen } 2x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

Para que la función sea continua, los límites por la derecha y por la izquierda cuando x tiende a cero deben ser iguales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} && \text{puesto que } e^{\lambda x^2} - 1 \sim \lambda x^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lambda x^2}{3x^2} \\ &= \frac{\lambda}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } 2x}{x} && \text{puesto que } \text{sen } 2x \sim 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2 \end{aligned}$$

Puesto que los dos límites deben ser iguales se deduce que $\lambda = 6$.

Para que la función sea continua, el valor de la función debe coincidir con el límite, o sea que debe ser $f(0) = 2$.

Ejercicio 3. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α .

Solución:

Se trata de un límite indeterminado del tipo 1^∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}}$$

Pueden darse dos casos:

- ◇ Si $\alpha \neq 0$, la fracción en el exponente tiende a cero puesto que el denominador es de mayor grado que el numerador. En este caso, el límite es $e^0 = 1$.
- ◇ Si $\alpha = 0$, la fracción en el exponente tiende a $\frac{1}{4}$, de forma que el límite es $e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$.

Ejercicio 4. *Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 20$ tiene solución. Calcula su parte entera.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la ecuación $x^3 + x - 25 = 0$ tiene solución. Lo demostraremos a partir del teorema de Bolzano:

- ◇ Sea la función

$$F(x) = x^3 + x - 25$$

continua en todo \mathbb{R} .

- ◇ Encontramos valores de x para los que la función tome valores de signo opuesto:

$$F(2) = 8 + 2 - 25 < 0$$

$$F(3) = 27 + 3 - 25 > 0$$

- ◇ De acuerdo con el teorema de Bolzano existe un valor $c \in (2, 3)$ en el que la función vale 0. Este número es solución de la ecuación.

Puesto que la solución está en el intervalo $(2, 3)$, su parte entera vale 2.

Ejercicio 5. *Estudia la continuidad de la función:*

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

Solución:

Se trata de una función racional. Por consiguiente es continua salvo para los valores de x que anulan el denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Veamos qué tipos de discontinuidad se presentan en estos puntos:

- ◊ En $x = 2$ el límite de la función es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificamos la fracción dividiendo mediante la regla de Ruffini por $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -1 & -2 \\ & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{5}{3}$$

Existe el límite pero no existe la función. Se trata entonces de una discontinuidad evitable.

- ◊ En $x = -1$ se anula el denominador y no se anula el numerador. El límite es infinito. Se trata de una discontinuidad de tipo salto infinito.

Ejercicio 6. *Calcula los siguientes límites:*

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{3x} \right)^{2x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x^2 - 5}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1-3x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x - 2}$

Solución:

◊ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{3x} \right)^{2x-1} = \left(\frac{4}{3} \right)^\infty = \infty$

◊ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1-3x} = \infty^{-\infty} = 0$

◊ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x^2 - 5} = \infty$

puesto que el numerador es una función exponencial y el denominador una potencial.

- ◊ El último límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para simplificar la fracción, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3 - \sqrt{x^2 + 5})(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(x - 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - x^2 - 5}{(x - 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{(x - 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 + x)(2 - x)}{(x - 2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(2 + x)}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 7. *Calcular las asíntotas de la curva:*

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Calcular la posición de la curva respecto a las asíntotas horizontales y oblicuas.

Solución:

- ◊ Existe una asíntota vertical $x = 0$ puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \infty$$

- ◊ No existe asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \infty$$

- ◊ La pendiente de la asíntota oblicua es

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1$$

y la ordenada en el origen

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2}{x} = -3$$

Así pues la asíntota oblicua es $y = x - 3$.

Para ver la posición de la curva respecto de la asíntota escribimos su ecuación en la forma:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = x - 3 + \frac{2}{x}$$

y de aquí deducimos que cuando x tiende a infinito la ordenada de la curva es mayor que la de la asíntota y, por consiguiente, la curva queda por encima de la asíntota. Lo contrario sucede cuando x tiende a menos infinito.

2. Segundo examen de límites y continuidad

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{\ln x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x-1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Solución:

- ◇ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{4x^2} = \frac{5}{4}$
- ◇ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{\ln x} = \infty$ puesto que x tiende a infinito más rápidamente que $\ln x$.
- ◇ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^\infty = \infty$
- ◇ $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\cos x - 1) \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x^2}{2} \frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
donde hemos utilizado la equivalencia $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Ejercicio 2. Determina el valor de a para que se verifique:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$$

Solución:

Calculamos el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x)(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que el término de mayor grado del denominador es $2x$. Y puesto que este límite debe ser igual a 2 resulta queda

$$\frac{a}{2} = 2 \implies a = 4$$

Ejercicio 3. Calcular el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

sea continua.

Solución:

Para que la función sea continua, el límite de la función cuando x tiende a cero debe coincidir con el valor de la función $f(0)$. Por consiguiente:

$$k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = 1$$

También podíamos haber calculado el límite teniendo en cuenta que $x - 1 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$.

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes funciones calcular las asíntotas verticales y horizontales u oblicuas y la posición de la curva respecto a estas últimas:

$$y = \frac{3x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}; \quad y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x + 1}$$

Solución:

- ◇ Las rectas $x = 2$ y $x = -1$ son asíntotas verticales de la función puesto que el límite en estos puntos es infinito.

Dividiendo encontramos que:

$$y = \frac{3x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = 3 + \frac{-2x + 12}{x^2 - x - 2}$$

De aquí deducimos que la asíntota horizontal es $y = 3$ y que la curva queda por encima de la asíntota en $-\infty$ y por debajo en $+\infty$.

- ◇ La segunda función tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Haciendo la división obtenemos:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x + 1} = x - 6 + \frac{9}{x + 1}$$

y por consiguiente, la recta $y = x - 6$ es una asíntota oblicua de la función. Ésta queda por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$.

Ejercicio 5. Demostrar que las curvas $y = x^3 + x^2$ e $y = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto. Calcular la parte entera de algún punto de intersección.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 - \cos x - 3 = 0$ tiene solución:

- ◇ Sea la función

$$F(x) = x^3 + x^2 - \cos x - 3$$

continua para todo x por ser suma de funciones continuas.

- ◇ Puesto que:

$$F(1) = 1 + 1 - \cos 1 - 3 = -\cos 1 - 1 < 0$$

$$F(2) = 8 + 4 - \cos 2 - 3 = 9 - \cos 2 > 0$$

- ◇ De acuerdo con el teorema de Bolzano existe un número $c \in (1, 2)$ que cumple que $F(c) = 0$. Este número c es solución de la ecuación, y, puesto que está en el intervalo $(1, 2)$, su parte entera es igual a 1.

3. Examen de derivadas

Ejercicio 1. Dada la función

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución:

Calculemos las derivadas:

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 1) + 2xe^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x - 1)$$

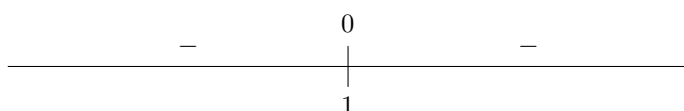
$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 2x - 1) + (-2x + 2)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 4x + 3) + (2x - 4)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 6x - 7)$$

- ◊ Para estudiar el crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada. La derivada es cero si

$$-x^2 + 2x - 1 = 0 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies x = 1$$

El signo de la derivada es:



La función tiene un punto de tangente horizontal en $(1, 2e^{-1})$ pero no tiene máximos ni mínimos, es siempre decreciente.

- ◊ La derivada segunda se anula para:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Hay puntos de inflexión en $(1, 2e^{-1})$ y en $(3, 10e^{-3})$.

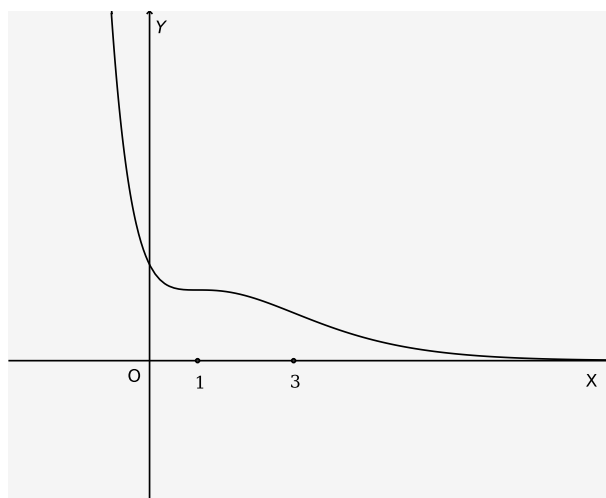
- ◊ Para obtener las asíntotas calculamos los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = \infty$$

Así pues, hay una asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

- ◊ Con estos datos, la gráfica es la siguiente



Ejercicio 2. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x .

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x \frac{1}{x} x = (\ln x)^2 + 2 \ln x$$

$$f''(x) = 2 \ln x \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2 \ln x + 2}{x}$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{2}{x} x - 1(2 \ln x + 2)}{x^2} = \frac{-2 \ln x}{x^2}$$

◇ Para calcular máximos y mínimos igualamos a cero la derivada:

$$(\ln x)^2 + 2 \ln x = 0 \implies \ln x (\ln x + 2) = 0 \implies \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = -2 \end{cases}$$

Es decir $x = 1$ y $x = e^{-2}$:

Para $x = 1$ la derivada segunda es positiva y la ordenada vale 0. Tenemos pues un mínimo en $(1, 0)$.

Para $x = e^{-2}$ la derivada segunda es negativa y la ordenada es $4e^{-2}$. Tenemos un máximo en $(e^{-2}, 4e^{-2})$.

◇ Igualamos a cero la derivada segunda para obtener los puntos de inflexión:

$$2 \ln x + 2 = 0 \implies \ln x = -1 \implies x = e^{-1}$$

Hay un punto de inflexión en (e^{-1}, e^{-1}) . Puede comprobarse con la derivada tercera que es punto de inflexión. Pero es evidente que entre el máximo y el mínimo debe existir este punto.

Ejercicio 3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

se pide:

- ◇ Hallar los valores de los parámetros a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.
- ◇ Para $a = b = 1$ estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Solución:

- ◇ Veamos en primer lugar que para que exista el límite cuando $x \rightarrow 0$, a y b deben ser iguales. En efecto, si a y b son diferentes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-b}{x} = \infty$$

Para $a = b$ calculamos el límite aplicando la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax} - a}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a-a-a^2x}{1+ax}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2x}{2x(1+ax)} = \frac{-a^2}{2}$$

Si la función es continua, el límite debe ser igual al valor de la función:

$$\frac{-a^2}{2} = -\frac{1}{2} \implies a^2 = 1 \implies a_1 = -1; \quad a_2 = 1$$

◊ Para $a = b = 1$ tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

La derivada es

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\ln(1+h) - 2h + h^2}{2h^3}$$

Calculamos el límite aplicando la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+h} - 2 + 2h}{6h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2(1+h) + 2h(1+h)}{6h^2(1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2}{6h^2(1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{6(1+h)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

- ◊ Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- ◊ Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- ◊ Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

◊ Calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

La derivada se anula en $x = 0$. El signo es el siguiente:

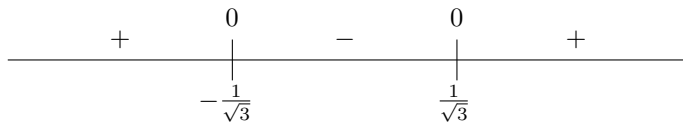
$$\begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad - \\ \hline \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

La función es creciente entre $-\infty$ y 0, y decreciente de 0 a ∞ . En (0, 2) hay un máximo.

◊ Estudiemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^{\cancel{2}} - 2(x^2 + 1)^{\cancel{2}}2x(-2x)}{(x^2 + 1)^{\cancel{2}^3}} = \frac{-2(x^2 + 1) - 4x(-2x)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

Obsérvese que hemos simplificado la derivada dividiendo numerador y denominador por $x^2 + 1$. La segunda derivada se anula en $x = -\sqrt{1/3}$ y $x = \sqrt{1/3}$. El signo de f'' es el siguiente:



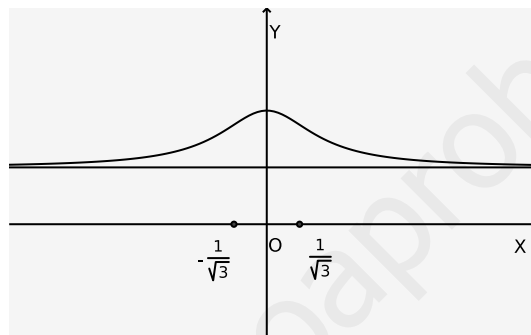
La función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$. Es convexa en $(-1, 1)$. Los puntos $(-1, \frac{3}{2})$ y $(1, \frac{3}{2})$ son puntos de inflexión.

◇ Puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función. No hay asíntotas verticales porque el denominador no se anula para ningún valor de x .

Con estos datos, la gráfica es como sigue.



Ejercicio 5. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

- ◇ Determinar el valor de k para que la función sea continua en \mathbb{R} .
- ◇ Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- ◇ Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- ◇ Si la función es continua, los límites laterales en $x = 0$ deben ser iguales. Calculemos primero el límite de $\sqrt{x} \ln x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -2x^{-1+3/2} = \lim_{x \rightarrow 0} -2x^{1/2} = 0$$

y por consiguiente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = 0$$

Como, por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + k) = k \implies k = 0$$

- ◇ Si $x = 0$, $f(x) = 0$ y tenemos un primer punto de corte en $(0,0)$. Por otra parte, si $y = 0$, $\sqrt{x} \ln x = 0$ nos da que o bien $x = 0$, o bien $x = 1$ y tenemos otro punto de corte en $(1,0)$.
- ◇ En el punto de abscisa 1 ya hemos visto que la ordenada vale 0. La derivada es:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{x} \sqrt{x}\right) 2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{x} \ln x}{2^{2x}}$$

En $x = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ y la ecuación de la recta tangente es:

$$y = \frac{1}{2} (x - 1)$$

Ejercicio 6. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x+1)(x^2+1) - 2x(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\cancel{6x^3} + \cancel{6x} + x^2 + 1 - \cancel{6x^3} - 2x^2 - \cancel{6x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

La derivada se anula en $x = -1$ y en $x = 1$. Analizamos el signo de la derivada:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & - & | & + & | & - & \\ \hline & & -1 & & 1 & & \end{array}$$

Entonces tenemos un mínimo en $(-1, \frac{5}{2})$ y un máximo en $(1, \frac{7}{2})$.

Para obtener los puntos de inflexión calculamos la derivada segunda:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{-2x(x^2+1)^{\cancel{2}} - 2(x^2+1)^{\cancel{2}} \cdot 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^{\cancel{2}^3}} \\ &= \frac{-2x(x^2+1) - 2 \cdot 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{-2x^3 + 4x^3 - 2x - 4x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Los ceros de la derivada segunda son $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Analizamos el signo de la derivada segunda:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & - & | & + & | & - & | & + & \\ \hline & & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & & \end{array}$$

Como en esos puntos cambia la curvatura, se trata de puntos de inflexión.

Ejercicio 7. Dada la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

- ◇ Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.
- ◇ Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.
- ◇ Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

- ◇ La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

de forma queda

$$f(a) = \frac{1}{a}; \quad f'(a) = \frac{-1}{a^2}$$

y la ecuación de la recta tangente es

$$y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x - a)$$

- ◇ Las intersecciones con los ejes de esta recta son:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x - a) \\ x = 0 \end{cases} \implies y - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \implies y = \frac{2}{a}$$

$$\begin{cases} y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x - a) \\ y = 0 \end{cases} \implies -\frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} \implies -\frac{2}{a} = -\frac{x}{a^2} \implies x = 2a$$

Por tanto, los puntos de corte con los ejes son $A(2a, 0)$ y $B(0, \frac{2}{a})$

- ◇ La distancia al cuadrado entre estos dos puntos es:

$$d^2 = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$$

Si queremos que esta cantidad sea mínima, derivamos e igualamos a cero:

$$(d^2)' = 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \implies 8a^4 - 8 = 0 \implies a^4 - 1 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es $a = 1$.

4. Segundo examen de derivadas

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites:

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}(1+x)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2(\ln x)^{\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{2 \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{\frac{2}{x}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se ha aplicado la regla de l'Hopital y las equivalencias $\ln(1+x) \sim x$ y $\operatorname{sen}(x-1) \sim x-1$.

Ejercicio 2. Hallar las tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.

Solución:

Como la pendiente de la recta tangente es -2 , la derivada de la función en el punto de tangencia debe valer -2 . Entonces, en es punto:

$$y' = \frac{2(x-1) - 1 \cdot 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \implies (x-1)^2 = 1 \implies \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Para $x_1 = 2$, $y_1 = 4$. La ecuación de la tangente es:

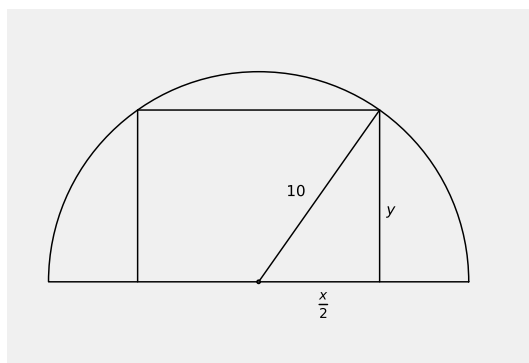
$$y - 4 = -2(x - 2)$$

y para $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ y la tangente es:

$$y = -2x$$

Ejercicio 3. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base sobre el diámetro de una circunferencia de 10 m de radio y los otros dos vértices sobre la circunferencia.

Solución:



La función que ha de ser máxima es el área (o su cuadrado):

$$S = x \cdot y = x \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} \implies S^2 = x^2 \left(100 - \frac{x^2}{4}\right) = 100x^2 - \frac{x^4}{4}$$

Derivando e igualando a cero:

$$(S^2)' = 200x - \frac{4x^3}{4} = 200x - x^3 = x(200 - x^2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 10\sqrt{2} \end{cases}$$

La solución $x = 0$ no se corresponde evidentemente con ningún máximo del área. La solución válida es:

$$x = 10\sqrt{2} \quad y = 5\sqrt{2}$$

Ejercicio 4. Hallar los coeficientes a , b , c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que la función tiene un extremo relativo en $x = 0$.

Solución:

Las derivadas de la función son:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Las condiciones del problema son las siguientes:

- ◇ La curva pasa por el punto $(1, 0)$:

$$f(1) = 0 \implies a + b + c + d = 0$$

- ◇ La derivada primera en $x = 1$ es -3 (la pendiente de la recta tangente):

$$3a + 2b + c = -3$$

- ◇ La derivada segunda en $x = 1$ es cero (por ser punto de inflexión)

$$6a + 2b = 0$$

- ◇ Finalmente, la derivada en $x = 0$ debe valer 0:

$$c = 0$$

Resolviendo el sistema resulta $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 2$.

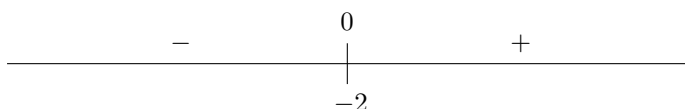
Ejercicio 5. Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la curva $y = xe^x$.

Solución:

Calculamos la derivada segunda:

$$\begin{aligned}y' &= e^x + e^x x = (x + 1)e^x \\y'' &= e^x + e^x(x + 1) = (x + 2)e^x\end{aligned}$$

El único cero de la derivada segunda es $x = -2$. El signo de la derivada segunda es (hay que tener en cuenta que e^x siempre es positivo):



Así pues, la función es convexa en $(-\infty, -2)$ y es cóncava en $(-2, \infty)$. El punto $(-2, -2e^{-2})$ es un punto de inflexión.

Ejercicio 6. Calcula a , b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 3 \\ bx + c & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 8]$. Calcular el punto cuya existencia asegura el citado teorema.

Solución:

Para que se cumplan las tres hipótesis del teorema de Rolle, debe ocurrir:

- ◇ $f(0) = f(8) \implies 0 = 8b + c$
- ◇ La función debe ser continua en el intervalo cerrado $[0, 8]$. Para que sea continua en $x = 3$, debe ocurrir que:

$$9 + 3a = 3b + c$$

- ◇ La función debe ser derivable en $(0, 8)$. Para $x \neq 3$ la derivada de la función es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 3 \\ b & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Si la función ha de ser derivable en $x = 3$:

$$f'(3^-) = f'(3^+) \implies 6 + a = b$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones resulta:

$$a = -\frac{39}{8}, \quad b = \frac{9}{8}, \quad c = -9$$

El teorema de Rolle asegura que debe existir al menos un punto de derivada cero. Este punto lo obtenemos igualando a cero la derivada:

$$2x - \frac{39}{8} = 0 \implies x = \frac{39}{16}$$

Ejercicio 7. Representar gráficamente la función

$$y = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

calculando las asíntotas y analizando el crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Para calcular las asíntotas efectuamos la división:

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 + 2x^2 - x \\ \hline 2x^2 - x \\ -2x^2 + 4x - 2 \\ \hline 3x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ x + 2 \end{array} \right.$$

Entonces:

$$y = \frac{x^3}{(1-x)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(1-x)^2}$$

Las asíntotas son $x = 1$ y $y = x + 2$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento calculamos la derivada:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (1-x)^2 - 2(1-x)(-1)x^3}{(1-x)^4} = \frac{3x^2 \cdot (1-x) + 2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$$

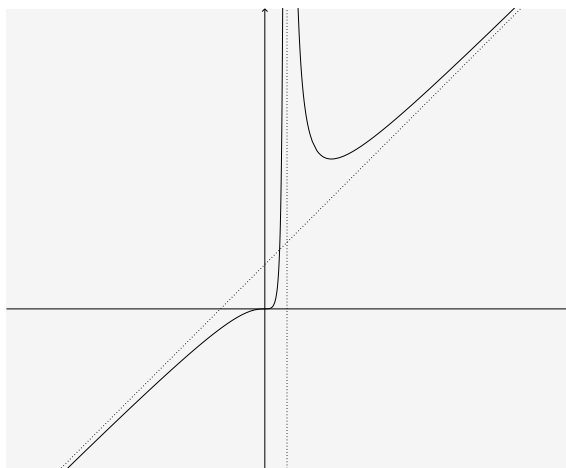
Las raíces del numerador son $x = 0$ (doble) y $x = 3$ (simple). La raíz del denominador es $x = 1$ (triple).

El signo de la derivada responde al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} & + & 0 & + & \neq & - & 0 & + \\ & & | & & | & & | & \\ \hline & & 0 & & 1 & & 3 & \end{array}$$

La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, \infty)$. Hay que notar que en $x = 0$ la derivada es cero y, por consiguiente, es un punto de tangente horizontal. Puesto que la función es creciente a la izquierda y a la derecha también es creciente en ese punto. Se trata de un punto de inflexión de tangente horizontal. La función es decreciente en $(1, 3)$. La función tiene un mínimo local en $(3, \frac{27}{4})$.

Con estos datos tenemos la siguiente gráfica:



5. Integrales

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$1. \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{5}} dx = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4} + C$$

$$2. \int (x^2 + 4)x(x^2 - 1) dx = \int (x^5 + 3x^3 - 4x) dx = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + C$$

$$3. \int (\operatorname{sen} x + e^x) dx = -\cos x + e^x + C$$

$$4. \int \frac{7}{\cos^2 x} dx = 7 \operatorname{tg} x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arsen} x + C$$

$$7. \int \frac{dx}{(x-4)^2} = \int (x-4)^{-2} dx = \frac{(x-4)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{x-4} + C$$

$$8. \int e^{x-4} dx = e^{x-4} + C$$

$$9. \int (3^x - x^3) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^4}{4} + C$$

$$10. \int \frac{5 dx}{4x^2 + 1} = 5 \int \frac{1}{1 + (2x)^2} dx = \frac{5}{2} \operatorname{artg} 2x + C$$

$$11. \int \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} dx = \int \left(x+1 + \frac{3}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x+1| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{arsen} \frac{x}{2} + C$$

$$13. \int 2xe^{x^2} dx$$

Haciendo el cambio $t = x^2$, $dt = 2x dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$, resulta:

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int 2xe^t \frac{dt}{2x} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

$$14. \int x^4 e^{x^5} dx$$

Haciendo $t = x^5$, $dt = 5x^4 dx$, $dx = \frac{dt}{5x^4}$, se obtiene:

$$\int x^4 e^{x^5} dx = \int x^4 e^t \frac{dt}{5x^4} = \frac{1}{5} \int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + C$$

$$15. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

Con el cambio $t = x^2 + 5$, $dt = 2x dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$, se obtiene:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}} = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2x} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 + 5} + C$$

$$16. \int \sqrt{(x+3)^5} dx = \int (x+3)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{(x+3)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2\sqrt{(x+3)^7}}{7} + C$$

$$17. \int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$$

Haciendo el cambio $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \sec^2 x dx$, $dx = \frac{dt}{\sec^2 x}$:

$$\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx = \int t \sec^2 x \frac{dt}{\sec^2 x} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$$

$$18. \int x^2 e^{3x} dx$$

Por partes

$$\begin{cases} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = e^{3x} & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases} \implies \int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

Integrando de nuevo por partes

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x} & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C \end{aligned}$$

$$19. \int x \cos x dx$$

Por partes:

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \operatorname{sen} x \end{cases} \implies \int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

$$20. \int \arcsos x dx$$

Integrando por partes

$$\begin{cases} u = \arcsos x & du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}$$

se obtiene:

$$\int \arcsos x dx = x \arcsos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

La última integral se resuelve mediante es cambio $t = 1 - x^2$, $dt = -2x dx$, $dx = \frac{-dt}{2x}$:

$$\begin{aligned} \int \arcsos x dx &= x \arcsos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsos x + \int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{-dt}{2x} \\ &= x \arcsos x - \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= x \arcsos x - \sqrt{t} + C \\ &= x \arcsos x - \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

6. Segundo examen de integrales

Ejercicio 1. Calcular la integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} dx$$

Solución:

Dividimos los polinomios

$$\begin{array}{r} x^2 \quad + 1 \\ - x^2 + x \\ \hline x + 1 \end{array} \quad \left| \frac{x^2 - x}{1} \right.$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} dx = \int \left(1 + \frac{x + 1}{x^2 - x} \right) dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x + 1}{x^2 - x} = \frac{x + 1}{x(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + Bx}{x(x - 1)}$$

De aquí que:

$$A(x - 1) + Bx = x + 1 \implies \begin{cases} x = 1 & B = 2 \\ x = 0 & A = -1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} dx = \int \left(1 + \frac{x + 1}{x^2 - x} \right) dx = \int \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1} \right) dx = x - \ln x + 2 \ln(x - 1) + C$$

Ejercicio 2. Calcular la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x} dx$$

Solución:

Se trata de una integral del tipo $\int \frac{u'}{u} dx$. Por consiguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x} dx = \left[\ln(2 - \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2 - \cos \frac{\pi}{3}) - \ln(2 - \cos 0) = \ln \frac{3}{2}$$

Ejercicio 3. Calcular el área comprendida por la curva $y = xe^{2x}$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

La curva corta al eje de abscisas en el punto 0 que está dentro del intervalo $[-1, 1]$. Por eso tendremos que integrar por separado entre -1 y 0, y entre 0 y 1.

Calculemos en primer lugar una primitiva de la función. Por partes, haciendo:

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= e^{2x} dx & v &= \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Entonces:

$$\int_{-1}^0 x e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{4} e^{-2} = \frac{3e^{-2} - 1}{4}$$

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

La primera integral es negativa, así que el área es igual a la integral cambiada de signo. El área total es:

$$S = \frac{1 - 3e^{-2}}{4} + \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 2 - 3e^{-2}}{4}$$

Ejercicio 4. Calcular la integral:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx$$

Solución:

Calculamos en primer lugar una primitiva. Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln x & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= x^3 dx & v &= \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

resulta:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

Calculamos ahora la integral definida:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right]_1^2 = (4 \ln 2 - 1) - \left(-\frac{1}{16} \right) = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$

Ejercicio 5. Utilizar el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable, utilizar:

$$t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

Solución:

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= e^t - e^{-t} \implies dx = (e^t + e^{-t}) dt \\ 4 + x^2 &= 4 + e^{2t} + e^{-2t} - 2e^t e^{-t} = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = (e^t + e^{-t})^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}} dt = \int dt = t + C = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + C$$

Ejercicio 6. Hallar el volumen del sólido formado cuando la región bajo la gráfica de $y = \sqrt{\sin x}$ en el intervalo $[0, \pi]$, gira alrededor del eje de abscisas.

Solución:

$$V = \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin x dx = [-\pi \cos x]_0^\pi = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

www.yoquieroaprobar.es

7. Nuevo examen de integrales

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales:

$$1. \int x(\ln x)^2 dx \qquad 2. \int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx$$

Solución:

◊ Integramos por partes:

$$u = (\ln x)^2 \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

y resulta:

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} \int 2 x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \int x \ln x dx$$

Integrando de nuevo por partes con:

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

resulta:

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C$$

◊ Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

de donde

$$A(x-2) + B(x-1) = 2x-1$$

Para $x=1$ resulta $A=-1$ y para $x=2$ resulta $B=3$. Por consiguiente:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

Ejercicio 2. Calcular las integrales:

$$1. \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \qquad 2. \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$$

Solución:

◊ Utilizamos el cambio de variable:

$$x = t^2 \implies dx = 2t dt$$

y resulta

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1 - t}{1 + t} 2t dt = 2 \int \frac{-t^2 + t}{t + 1} dt$$

Haciendo la división:

$$= \int \left(-t + 2 - \frac{2}{t + 1} \right) dx = -\frac{t^2}{2} + 2t - 2 \ln |t + 1| + C$$

y deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = -\frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + C$$

◊ El denominador no tiene raíces. Escribimos como suma de cuadrados

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx &= \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 2} dx \\ &= \int \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + (x + 1)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{artg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Halla el punto en el que la función $F(x) = \int_0^x \frac{t - 1}{1 + t^2} dt$ alcanza su valor mínimo.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$F'(x) = \frac{x - 1}{1 + x^2}$$

que se anula en $x = 1$. La derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de este número. En $x = 1$ se encuentra, por consiguiente, el mínimo de la función.

Ejercicio 4. Halla el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

Solución:

Los puntos de corte de las dos curvas están en $x = -1$ y $x = 1$. Integramos entre estos dos puntos la diferencia de las dos funciones y obtenemos:

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2x^2 - 3) dx = \int_{-1}^1 (3x^2 - 3) dx = \left[\frac{3x^3}{3} - 3x \right]_{-1}^1 = -4$$

Por tanto, el área es igual a 4.

Ejercicio 5.

◊ Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

- ◊ Calcula el área del recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada.

Solución:

- ◊ Para $x = -1$ la ordenada vale $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.
La derivada es $y' = 3x^2 - 3$. Por tanto la pendiente de la tangente es:

$$m = y'(-1) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es $y = 2$.

- ◊ Tenemos que calcular el área entre $y = 2$ e $y = x^3 - 3x$. Calculamos en primer lugar los puntos de corte entre ambas gráficas:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 2 \end{cases} \implies x^3 - 3x - 2 = 0$$

Sabemos que una solución es $x = -1$. Esto quiere decir que el polinomio se puede factorizar por $x + 1$. Dividiendo por $x + 1$ resulta:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

La ecuación factorizada es $(x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$ que tiene dos soluciones $x = -1$ y $x = 2$. Estos son los límites de la integral.

Integramos entre estos dos números la diferencia de las dos funciones:

$$\int_{-1}^2 (x^3 - 3x - 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 = (4 - 6 - 4) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) = -\frac{27}{4}$$

El área es entonces igual a $\frac{27}{4}$.

8. Matrices y sistemas

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ◊ Calcular los valores del parámetro m para los que la matriz A no tiene inversa.
- ◊ Para $m = 0$ calcular A^3 y A^{25} .
- ◊ Para $m = 0$, calcula la matriz X que verifica $XA = B$ siendo $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Solución:

- ◊ Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

El determinante se anula para $m = -1$ y $m = 1$. Para estos valores de m , no existe la matriz inversa.

◊ Calculamos las potencias:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^3 = -I \implies A^6 = I \implies A^{24} = (A^6)^4 = I \implies A^{25} = A^{24}A = A$$

◊ Despejando X obtenemos $X = BA^{-1}$. Debemos calcular A^{-1} . En realidad ya la hemos calculado puesto queda

$$A^3 = -I \implies A \cdot A^2 = -I \implies A \cdot (-A^2) = I$$

Por consiguiente:

$$A^{-1} = -A^2 = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y entonces:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. Resuelve la ecuación matricial $AX + B^t = C^t$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución:

Despejando la incógnita tenemos que:

$$X = A^{-1}(C^t - B^t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de A y obtenemos

$$-\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices resulta:

$$X = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 9 & 45 \\ -12 & -24 \\ 6 & -54 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sabiendo que $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determinar a y b .

Solución:

Calculamos:

$$f(0) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3b$$

Puesto que $f(0) = -3$ resulta que $b = -1$.

Entonces:

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2a-3 + a-1 = -a-4 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f(-1)$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -2a+1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -2a+1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & -2a+4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a-4 \end{aligned}$$

Igualando:

$$f(1) = f(-1) \implies -a-4 = a-4 \implies a = 0$$

Ejercicio 4. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del parámetro k :

$$\begin{aligned} kx + ky - z &= 2 \\ 3x - ky &= 0 \\ 5x + ky &= 0 \\ x &+ 2z = 1 \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40k$$

El determinante es cero para $k = 0$. Por consiguiente:

- ◇ Si $k \neq 0$ el rango de la matriz ampliada es 4 y el rango de la matriz de coeficientes es 3. El sistema es incompatible.
- ◇ Si $k = 0$:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

El rango de la matriz ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2 (puesto que tiene una columna de ceros). El sistema también es incompatible para $k = 0$.

Ejercicio 5. Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales y resolverlo en el caso en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{aligned} ax - y - 4z &= 1 \\ x + ay - 2z &= -1 \\ y + z &= -a \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4 + 2a + 1 = a^2 + 2a - 3$$

El determinante se anula para $a = -3$ y $a = 1$. Pueden presentarse los siguientes casos:

- ◇ Para $a \neq -3$ y $a \neq 1$ el rango de las matrices de coeficientes y ampliada es 3. El sistema es compatible determinado.
- ◇ Para $a = -3$ tenemos:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Puede verse que el determinante de esta matriz es distinto de cero. Por consiguiente, el rango de la matriz ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2. El sistema es incompatible.

- ◇ Para $a = 1$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

puesto que la última columna es igual a la segunda por -1 y las tres primeras sabemos que son dependientes. El rango de ambas matrices es 2 y el sistema es compatible determinado.

Resolvamos el sistema para $a = 1$:

$$\begin{aligned} x - y - 4z &= 1 \\ x + y - 2z &= -1 \\ y + z &= -1 \end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones son independientes. Tomando $z = t$ como parámetro resulta:

$$x = 3t, \quad y = -1 - t, \quad z = t$$

9. Segundo examen de álgebra

Ejercicio 1. Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

- ◇ Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
- ◇ Resolverlo para el caso $k = 3$.

Solución:

- ◇ Para que el sistema tenga soluciones distinta de la trivial, el rango de la matriz de coeficientes debe ser menor que 3. Por consiguiente debe ser cero el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} = -k + 2k + 8 - 1 + 8 - 2k^2 = -2k^2 + k + 15 = 0$$

ecuación que tiene como soluciones $k = 3$ y $k = -\frac{5}{2}$.

- ◇ Para $k = 3$ el rango de la matriz es 2. Como las dos primeras ecuaciones son independientes, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Tomamos $z = t$ como parámetro y resulta:

$$\begin{cases} x + 3y = t \\ 2x - y = -2t \end{cases}$$

y resolviendo este sistema calculamos la solución $(-\frac{5t}{7}, \frac{4t}{7}, t)$.

Ejercicio 2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- ◇ Hallar dos constantes a y b , tales que $A^2 = aA + bI$.
- ◇ Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5 .

Solución:

- ◇ Calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Entonces, $A^2 = aA + bI$ quiere decir que:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

ecuación matricial equivalente al sistema:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a = -1 \\ a = -1 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = -1$ y $b = 3$.

- ◊ Tenemos la igualdad $A^2 = -A + 3I$. Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que las matrices A e I conmutan:

$$\begin{aligned} A^4 &= (-A + 3I)^2 \\ &= A^2 - 6A + 9I \\ &= -A + 3I - 6A + 9I \\ &= -7A + 12I \end{aligned}$$

Multiplicando por A :

$$\begin{aligned} A^5 &= -7A^2 + 12A \\ &= -7(-A + 3I) + 12A \\ &= 19A - 21I \end{aligned}$$

Y sustituyendo A e I resulta:

$$A^5 = \begin{bmatrix} -2 & 19 \\ 19 & 17 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- ◊ Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m .
 ◊ En el caso $m = 0$, resolver el sistema.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

- ◊ Calculamos el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2(m-1)^2 + m + m - m(m-1) - m(m-1) - 2 \\ &= 2m^2 - 4m + 2 + 2m - 2m^2 + 2m - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que las 3 primeras columnas son dependientes sea cual sea el valor de m . Efectivamente podemos ver que la tercera es la suma de las dos primeras. Podemos suprimirla para calcular el rango y calcular el determinante formado por las dos primeras y la cuarta columnas:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} &= (m-1)^3 + 1 + 1 - (m-1) - (m-1) - (m-1) \\ &= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 + 2 - 3m + 3 \\ &= m^3 - 3m^2 + 4 \end{aligned}$$

que se anula para $m = -1$ y $m = 2$.

Para $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el rango de la matriz es 3.

Para $m = -1$ tenemos:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

Para $m = 2$:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

◇ Para $m = 0$ tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + y + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

No podemos tomar t como parámetro porque la matriz de coeficientes del sistema que resulta tiene determinante igual a cero. Tomemos $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} -x + y + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x + y - t = -2\lambda \end{cases}$$

Este sistema puede resolverse por la regla de Cramer pero sumando las dos primeras ecuaciones se ve que $t = 0$. Sumando la primera y la tercera se obtiene $y = -\lambda$ y sumando la segunda y la tercera $x = \lambda$. La solución es entonces $(-\lambda, -\lambda, \lambda, 0)$.

Ejercicio 4. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- ◇ Estudiar la compatibilidad del sistema.
- ◇ Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
- ◇ Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Solución:

- ◇ Las matrices de coeficientes y ampliada tienen rango 2. Como el sistema tiene 3 incógnitas es compatible indeterminado.

◊ Debemos añadir una ecuación independiente de las anteriores. Por ejemplo, $x = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es distinto de cero. El rango es 3 y el sistema es compatible determinado.

◊ Añadimos una ecuación contradictoria con cualquiera de las otras dos. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

y el sistema es incompatible. Puede comprobarse que el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3.

10. Geometría

Ejercicio 1. Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s .

Solución:

Calculamos el vector director de la perpendicular común:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -5, -4)$$

Calculamos ahora el plano que contiene a la recta r y a la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ y-2 & 1 & -5 \\ z & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \implies -7x - 5y + z + 3 = 0$$

y el plano que contiene a la recta s y a la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y+1 & 1 & -5 \\ z+2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \implies x + 15y - 18z - 23 = 0$$

La perpendicular común a las dos rectas es la intersección de los dos planos calculados:

$$\begin{cases} -7x - 5y + z + 3 = 0 \\ x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Solución:

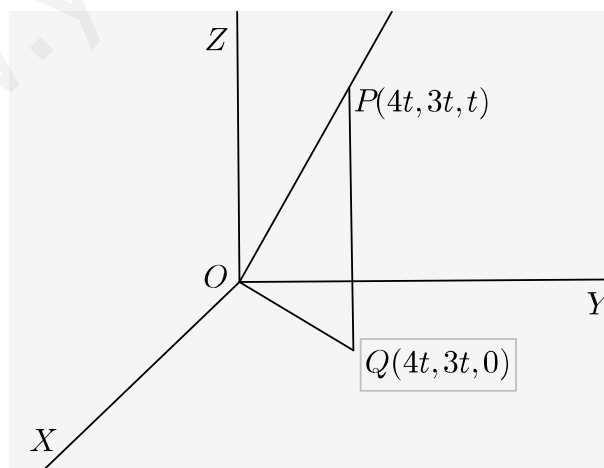


Figura 1: Problema 2

Puesto que la recta pasa por el origen y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Podemos escribir el punto P como $P(4t, 3t, t)$ para un cierto valor de t . Su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $Q(4t, 3t, 0)$ (ver figura 1). El área del triángulo puede calcularse como la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4t & 3t & t \\ 4t & 3t & 0 \end{vmatrix} = (-3t^2, 4t^2, 0)$$

Entonces puesto que la mitad del módulo debe ser igual 1:

$$\frac{1}{2}|(-3t^2, 4t^2, 0)| = \sqrt{9t^4 + 16t^4} = 5t^2 = 1 \implies t = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Los puntos son:

$$P_1 \left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right); \quad P_2 \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)$$

Ejercicio 3. *Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta*

$$r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$ se pide:

- ◇ Ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .
- ◇ Ecuación de la recta que pasa por A , corta a r y es paralela a π .

Solución:

- ◇ Si el plano es paralelo a r , el vector director de la recta es vector director del plano. Si es perpendicular al plano π , el vector normal a este plano, es vector director del plano que buscamos. Como además este plano debe contener el punto $A(1, -2, -3)$, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z+3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \implies 3x + 3y - z = 0$$

- ◇ Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

un punto de esta recta es $P(-1, 0, 0)$ y un vector director es $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

Si la recta buscada pasa por A y corta a r debe estar en el plano determinado por A y r . Los vectores directores de este plano son el vector director de la recta $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ y el vector $\overrightarrow{AP} = (-2, 2, 3)$. La ecuación de este plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & -2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies 3(x+1) + 3y = 0 \implies 3x + 3y + 3 = 0$$

que podemos escribir como $x + y + 1 = 0$.

Si la recta pasa por A y es paralela a π , debe estar contenida en el plano paralelo a π por A :

$$1(x-1) - 2(y+2) - 3(z+3) = 0 \implies x - 2y - 3z - 14 = 0$$

La recta buscada es la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - 2y - 3z - 14 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- ◊ Discutir la posición relativa de las dos rectas según los valores del parámetro a .
- ◊ Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las rectas r y s .

Solución:

- ◊ En primer lugar escribimos las ecuaciones de las rectas en paramétricas y obtenemos un punto y un vector director de cada una de ellas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + at \\ y = t \\ z = 1 - at \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 - s \\ z = s \end{cases}$$

La recta r queda determinada por el punto $P_1(2, 0, 1)$ y el vector $\vec{u}_1 = (a, 1, -a)$. La segunda por el punto $P_2(1, 3, 0)$ y el vector $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$. Calculamos $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -3, 1)$. La posición relativa depende del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ -a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4a$$

Si $a \neq 0$ el determinante es distinto de cero y las rectas se cruzan. Si $a = 0$ las dos rectas son coplanarias. Puesto que no son paralelas, se cortan.

- ◊ Para $a = 1$, el producto mixto $[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2] = 4$.

Calculamos el producto vectorial de los dos vectores directores:

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -2)$$

La distancia entre las rectas es:

$$d = \frac{[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2]}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 5. Dados el plano:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

- ◇ Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 .
- ◇ Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades.

Solución:

- ◇ Escribimos la ecuación de la recta en paramétricas y resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4t \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

que tiene como solución el punto $P(3, 2, -4)$.

- ◇ Un plano paralelo al dado tiene por ecuación $x + y + z = D$. Su intersección con la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4t \\ x + y + z = D \end{cases} \implies 1 + 2t - 1 + 3t - 4t = D \implies t = D$$

de forma que el punto de intersección es $Q(1 + 2D, -1 + 3D, -4D)$. La distancia PQ es:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1 + 2D - 3)^2 + (-1 + 3D - 2)^2 + (-4D + 4)^2} \\ &= \sqrt{(2D - 2)^2 + (3D - 3)^2 + (-4D + 4)^2} \\ &= \sqrt{29D^2 - 58D + 29} \end{aligned}$$

Como la distancia debe ser $\sqrt{29}$ se cumple que:

$$29D^2 - 58D + 29 = 29 \implies D^2 - 2D = 0 \implies \begin{cases} D = 0 \\ D = 2 \end{cases}$$

Las soluciones son los planos $x + y + z = 0$ y $x + y + z = 2$.

Ejercicio 6. Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

- ◇ Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π .
- ◇ Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π , y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

Solución:

- ◇ La recta perpendicular al plano por el origen es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

y su intersección con el plano:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = t \\ x + 3y + z = 4 \end{cases} \implies t = \frac{4}{11}$$

y el punto de intersección es $Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$.

El punto Q es el punto medio entre el origen y su simétrico O' . De aquí deducimos que $O'\left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$.

- ◇ Tenemos que calcular el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados. Calculamos los vértices como intersección de los planos y resultan ser:

$$O(0, 0, 0); \quad A(4, 0, 0); \quad B\left(0, \frac{4}{3}, 0\right); \quad C(0, 0, 4)$$

El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6} [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{32}{9}$$
