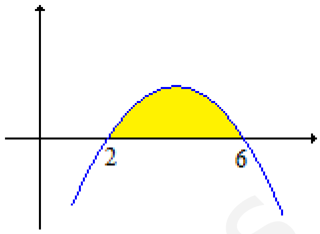
1º Calcular las áreas

a. Limitada por la parábola $y=-x^2+8x-12$ y el eje OX.

Solución.

Lo primero será calcular los puntos de intersección de la parábola con el eje OX, que corresponderán a los límites de integración.

$$\begin{cases}\text{Parábola}: y=-x^2+8x-12 \\ \text{OX}: y=0\end{cases} : 0=-x^2+8x-12 : \begin{cases}x=2\\ x=6\end{cases}$$



Por tratarse de una parábola bastante elemental, no merece la pena esbozar la gráfica de la función (Parábola con máximo, y por tanto el área que se pide esta por encima del eje OX).

$$\text{Área}=\int_2^6\left(-x^2+8x-12\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}-12x\right]_2^6=\left(-\frac{x^3}{3}+4x^2-12x\right]_2^6=$$

$$=-\frac{6^3}{3}+4\cdot6^2-12\cdot6-\left(-\frac{2^3}{3}+4\cdot2^2-12\cdot2\right)=0-\left(-\frac{32}{3}\right)=\frac{32}{3}u^2$$

b. Limitada por la parábola $y=x^2+4$, el eje OX, y las rectas x = –2, x = 5.

Solución.

En este caso, dan la función ($y=x^2+4$), los límites de integración (x = –2, x = 5), y el área esta situada por encima del eje OX ($y=x^2+4>0\ \forall\, x\in R$).

$$\text{Área}=\int_{-2}^5\left(x^2+4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^5=\left(\frac{5^3}{3}+4\cdot5\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}+4\cdot(-2)\right)$$

$$=\frac{185}{3}-\left(-\frac{32}{3}\right)=\frac{217}{3}u^3$$

c. Comprendida entre las curvas $y=x^2-8x+6$, $y=2x-10$

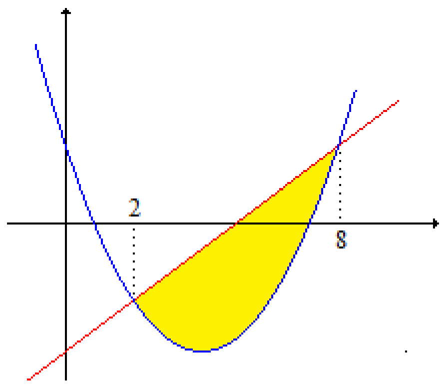
Solución.

Como se pide calcular el área encerrada entre dos funciones, los primero será calcular los límites de integración resolviendo el sistema que forman las dos funciones.

$$\begin{cases}y=x^2-8x+6\\ y=2x-10\end{cases} : x^2-8x+6=2x-10$$

$$x^2-10x+16=0 : \begin{cases}x=2\\ x=8\end{cases}$$

Si es posible, esbozar el área:



El área se calcula haciendo la integral de la resta de la función que esta por encima menos la que está por debajo. En el caso de no esbozar el área, lo que se hace es restarlas en cualquier orden y hacer la integral en valor absoluto.

$$A=\int_2^8\left(2x-10-\left(x^2-8x+6\right)\right)dx=\int_2^8\left(-x^2+10x-16\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{10x^2}{2}-16x\right]_2^8=$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+5x^2-16x\right]_2^8 = -\frac{8^3}{3}+5\cdot 8^2-16\cdot 8-\left(-\frac{2^3}{3}+5\cdot 2^2-16\cdot 2\right)=$$

$$=\frac{64}{3}-\left(-\frac{44}{3}\right)=\frac{108}{3}=36\,u^2$$

2º Calcular $\int_2^5 e^{3x-1}dx$

Solución.

$$\int_2^5 e^{3x-1}dx = \left\{\begin{array}{c}\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)}+C\\ f(x)=3x-1\\ f'(x)=3\end{array}\right\} = \frac{1}{3}\int_2^5 e^{3x-1}\cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(e^{3x-1}\right]_2^5 = \frac{1}{3} e^{3\cdot 5-1}-\frac{1}{3} e^{3\cdot 2-1}=$$

$$=\frac{1}{3} e^{14}-\frac{1}{3} e^5=\frac{1}{3}\left(e^{14}-e^5\right)$$

3º Calcular:

a. $\int\left(6x^2-3x^{2/3}+5x^{-1/2}-7\right)dx$

b. $\int\left(4x^{-3/5}-6x^{-1}+4x^{-3}\right)dx$

c. $\int\frac{8x}{6x^2+5}dx$

d. $\int\cos(9x+25)\,dx$

Solución.

a. $$\int\left(6x^2-3x^{2/3}+5x^{-1/2}-7\right)dx = \left\{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right\} = \frac{6x^3}{3}-\frac{3x^{5/3}}{5/3}+\frac{5x^{1/2}}{1/2}-7x+C$$

$$\int\left(6x^2-3x^{2/3}+5x^{-1/2}-7\right)dx = 2x^3-\frac{9}{5}x^{5/3}+10x^{1/2}-7x+C$$

b. $$\int\left(4x^{-3/5}-6x^{-1}+4x^{-3}\right)dx = \int\left(4x^{-3/5}-\frac{6}{x}+4x^{-3}\right)dx = \left\{\begin{array}{c}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C\\ \int\frac{k}{x}dx = k\,\mathrm{Ln}\,|x|+C\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{4x^{2/5}}{2/5}-6\,\mathrm{Ln}\,|x|+\frac{4x^{-2}}{-2}+C=10x^{2/5}-6\,\mathrm{Ln}\,|x|-\frac{2}{x^2}+C$$

c. $$\int\frac{8x}{6x^2+5}dx = \left\{\begin{array}{c}\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \mathrm{Ln}\,|f(x)|+C\\ f(x)=6x^2+5\\ f'(x)=12x\end{array}\right\} = \frac{8}{12}\int\frac{12x}{6x^2+5}dx = \frac{8}{12}\mathrm{Ln}\left|6x^2+5\right|+C$$

d. $$\int\cos(9x+25)\,dx = \left\{\begin{array}{c}\int\cos f(x)\cdot f'(x)\,dx = \mathrm{sen}\,f(x)+C\\ f(x)=9x+25\\ f'(x)=9\end{array}\right\} = \frac{1}{9}\int\cos(9x+25)\cdot 9\,dx = \frac{1}{9}\mathrm{sen}\,(9x+25)+C$$