Problema 1 Se pide:

a) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$ y calcular la matriz inversa de A.

b) Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que $|A| = m$, calcular el valor del determinante de $A + I$ en función de m, donde I representa a la matriz identidad.

Solución:

a)

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A - I = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego $A^3 = -A - I$

b)

$$A^3 = -A - I \Longrightarrow A + I = -A^3 \Longrightarrow |A + I| = -|A^3| = -|A|^3 = -m^3$$

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} mx+ & y- & mz = & 2 \\ (m-3)x+ & + & mz = & 1 \\ -x+ & my & = & 3 \end{array} \right.$$

a) Discutirlo para los distintos valores de m.

b) Resolverlo para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

c) En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} mx+ & y- & mz= & 2\\ (m-3)x+ & + & mz= & 1\\ -x+ & my & = & 3\end{array}\right.$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -m & 2\\ m-3 & 0 & m & 1\\ -1 & m & 0 & 3\end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} m & 1 & -m\\ m-3 & 0 & m\\ -1 & m & 0\end{array}\right|=-2m^3+3m^2-m$$

$$2m^3+3m^2-m=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} m=0\\ m=1\\ m=1/2\end{array}\right.$$

- Cuando $m\neq 0$ y $m\neq 1$ y $m\neq 1/2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$A=$Rango$\overline{A}=3=$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m=1/2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1 & -1/2 & 2\\ -5/2 & 0 & 1/2 & 1\\ -1 & 1/2 & 0 & 3\end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y el menor $\left|\begin{array}{cc} 1/2 & 1\\ -5/2 & 0\end{array}\right|=5/2\neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

El menor $\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1/2 & 2\\ 0 & 1/2 & 1\\ 1/2 & 0 & 3\end{array}\right|=\dfrac{3}{4}\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$

En conclusión, cuando $m=1/2\Longrightarrow$ Rango$(A)=2\neq$Rango$(\overline{A})=3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2\\ -3 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$ Como el menor

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Se observa claramente que, la tercera fila es la suma de las otras dos y además el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas, luego el sistema es Compatible Indeterminado (Tiene infinitas soluciones).

b) Resolvemos para $m = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 2 \\ -2x+ & + & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & = 1 - 2z \\ 3x+ & y = & z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c)
- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq 1$ y $m \neq 1/2 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
- Cuando $m = 1/2 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan dos a dos sin tener puntos comunes a los tres.
- Cuando $m = 0 \Longrightarrow$ Dos planos son paralelos y el tercero les corta.
- Cuando $m = 1 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan en una recta.

Problema 3 Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = A^{-1}(B - C)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B - C = B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & 0 \\ 11 & 1 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$