Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx- & y+ & z= & m \\ 2x+ & my+ & z= & 2 \\ x+ & 2y & = & m \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m e interpretarlo geométricamente.

b) Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 2 & m \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & m \end{array}\right), \quad |A| = 6 - 6m = 0 \quad a = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado. Los tres planos se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Se observa que la tercera fila $F_3 = F_2 - F_1$, luego Rango$(A) = 2$Rango$(\overline{A}) <$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones y los tres planos se cortan en una recta.

b) Si $m = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1 \\ 2x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lr} x = 1- & 2/3\lambda \\ y = & 1/3\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 2 & -m \\ 3 & m & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ Calcular los valores que debe tomar el parámetro m de manera que A sea inversible. Calcular, si es posible, la inversa de esta matriz para $m = 0$.

Solución:

$\|A| = 5(m^2 - 5m + 4) = 0 \Longrightarrow m = 1,\ \ m = 4.$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $m = 1$ o $m = 4 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}

Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & -3/10 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Hállense las matrices A cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c} c = b \\ d = a + b \\ c + c = d \\ b + d = c + d \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = b \\ d = a + c \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ c & a+c \end{pmatrix}$$

Problema 4 Resolver la ecuación matricial

$$A^2X - I = B^2X - C$$

donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2X - I = B^2X - C \Longrightarrow X = (A^2 - B^2)^{-1}(I - C)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^2-B^2)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix};\quad I-C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$