Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ & (1+a)y+ & z = & 4 \\ x+ & 2y+ & az = & 4 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de a e interpretarlo geométricamente.

b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Castilla-León (Junio 2006)

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 1 & 4 \\ 1 & 2 & a & 4 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 1 = 0 \quad a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Si $a = 2$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ & 3y+ & z = & 4 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Problema 2 Una mujer ha obtenido 4500 euros de beneficio por invertir un total de 60000 euros en tres empresas: α, β y γ. Se sabe que el dinero invertido en la empresa α fué M veces la suma de las cantidades invertidad en las empresas β y γ, y que los beneficios de la inversión fueron del 5 % en la empresa α, 10 % en la empresa β y 20 % en la empresa γ

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita calcular la inversión realizada por la mujer en cada empresa.

b) Prueba que para $M > 0$ el sitema es compatible determinado

c) Calcula la solución para $M = 2$.

Cantabria (Junio 2006)

Solución:

x euros invertidos en la empresa α
y euros invertidos en la empresa β
z euros invertidos en la empresa γ.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60000 \\ x = M(y + z) \\ 0,05x + 0,1y + 0,3z = 4500 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 60000 \\ x- & My- & Mz = & 0 \\ x+ & 2y+ & 4z = & 90000 \end{array} \right.$$

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 1 & -M & -M & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 90000 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -2M-2 = 0 \Longrightarrow M = -1$$

Si $M \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $M = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} x+ & y+ & z = & 60000 \\ x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 4z = & 90000 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como

$$|A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 60000 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 90000 \end{array} \right| = 60000 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. Y por tanto, cuando $M > 0$ el sistema será Compatible Determinado.

c) Si $M = 2$ el sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 60000 \\ x- & 2y- & 2z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 4z = & 90000 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 40000 \\ y = 15000 \\ z = 5000 \end{array} \right.$$

Problema 3 Hállense las matrices A cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \cdot A$$

Castilla-León (Junio 2006)

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} a+b & b \\ c+d & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ a+c & b+d \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a+b = a \\ b = b \\ c+d = a+c \\ d = b+d \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ a = d \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} d & 0 \\ c & d \end{array} \right)$$