Problema 1 Discute el rango de la matriz siguiente según los valores del parámetro k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k \\ 1 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}$$

Resuelve el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ cuando $k = -1$

(Islas Baleares (junio 2007))

Solución

- $|A| = k^2(k^2 - 2k + 1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \;\; k = 1$
  - Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
  - Si $k = 0$
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow F_1 = F_2 = F_3 \text{ las tres filas son iguales} \Longrightarrow$$
    $$\text{Rango}(A) = 1$$
  - Si $k = 1$
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow F_1 = F_2 = F_3 \text{ las tres filas son iguales} \Longrightarrow$$
    $$\text{Rango}(A) = 1$$
- Si $k = -1$:
  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \quad |A| = 4$$

  Resolvemos por Cramer:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & -1 & -1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{b + c}{4}, \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-a + c}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}}{4} = \frac{a-b}{4}$$

Problema 2 Sea

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$$

Halla dos raices de este polinomio de grado cuatro.

(La Rioja (junio 2007))

Solución

- cuando $x = 1$ el determinante tiene dos fila iguales y, por tanto vale cero. Ésto quiere decir que $P(1) = 0 \Longrightarrow x = 1$ es una raiz de $P(x)$.
- cuando $x = 3$ el determinante tiene dos fila iguales y, por tanto vale cero. Ésto quiere decir que $P(3) = 0 \Longrightarrow x = 1$ es una raiz de $P(x)$.

Problema 3 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ Determina:

1. Determina la matriz $B = A^2 - 2A$
2. Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.
3. Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$

(Andalucía (junio 2007))

Solución

1. $$B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

2. $|B| = -\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \;\; \lambda = 3$:
   - Si $\lambda = -1$ o $\lambda = 3 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}
   - Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

3. Si $\lambda = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Un cajero automático contiene 95 billete de 10, 20, y 50 euros, y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros, averiguar cuántos billetes de cada tipo hay.

(Zaragoza (junio 2007))

Solución

Sea x el n$^{\text{o}}$ de billetes de 10 euros, y el n$^{\text{o}}$ de billetes de 20 euros y z el n$^{\text{o}}$ de billetes de 50 euros.

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 50 \\ y = 25 \\ z = 20 \end{array}\right.$$