Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx- & y+ & 2z= & 3\\ 2x+ & my & = & m\\ mx+ & 5y- & 6z= & -7\end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema según los valores del parámetro m
2. Resuelve el sistema para $m = 0$ y para aquellos en los que existan infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} m & -1 & 2 & 3\\ 2 & m & 0 & m\\ m & 5 & -6 & -7\end{array}\right);\quad |A|=-8(m^2-1)=0\Longrightarrow m=-1,\ m=1$$

- Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -1$:

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 5 & -6 & -7\end{array}\right);\quad |A|=0,\quad \left|\begin{array}{rr} -1 & -1\\ 2 & -1\end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

  $$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

  Como $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado y tiene infinitas soluciones.
- Si $m = 1$:

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & -6 & -7\end{array}\right);\quad F_3 = 2F_2 - 3F_1$$

  Luego el sistema es Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

2. Si $m = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x- & y+ & 2z = & 3 \\ 2x- & y & = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\lambda \\ \\ y = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & 2z = & 3 \\ 2x+ & y & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}\lambda \\ \\ y = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & -y+ & 2z = & 3 \\ 2x & & = & 0 \\ & 5y- & 6z = & -7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Problema 2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.
2. Para $m = 0$, halla la matriz inversa de A
3. Para $m = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + I = B$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

1.

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -(m^2+13m-14) = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = 14$$

- Si $m = 1$ o $m = 14 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ No existe inversa.
- Si $m \neq 1$ y $m \neq 14 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Si existe inversa.

2. Para $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/14 & 9/14 & -1/14 \\ 3/7 & -4/7 & 2/7 \\ 5/7 & -2/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

3. Para $m = 0$: $AX + I = B \Longrightarrow X = A^{-1}(B - I)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/14 & 9/14 & -1/14 \\ 3/7 & -4/7 & 2/7 \\ 5/7 & -2/7 & 1/7 \end{pmatrix}; \quad B - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B-I) = \begin{pmatrix} -5/14 & 9/14 & -1/14 \\ 3/7 & -4/7 & 2/7 \\ 5/7 & -2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 & 3/7 & 11/14 \\ 6/7 & 2/7 & -1/7 \\ 3/7 & 1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

Problema 3 En la playa de Gandía se encuentran tres alumnos del colegio Villaeuropa de forma fortuita. El mayor de ellos les dice a los otros dos que hace cinco años su edad era la suma de las de ellos. El mediano les dice a los otros dos que tiene la mitad de la suma de sus edades. El pequeño concluye: cuando yo tenga la edad del mayor de vosotros, el mediano tendrá seis años más de los que tiene en este momento.

Solución:

Sean: x años del mayor, y años del mediano y z años del menor.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 5 = y + z - 10 \\ \\ y = \dfrac{x+z}{2} \\ \\ x + y - z = y + 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - y - z = -5 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 14 \\ y = 11 \\ z = 8 \end{array} \right.$$