Problema 1 *(5 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az = & -a \\ 4x+ & ay- & az = & a \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1 punto) Discutir el sistema

2. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Modelo 2005 - Opción B)
Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 16 = 0 \Longrightarrow a = \pm 4$$

Si $a \neq \pm 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{array}\right| = -32 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Como el menor

$$\left|\begin{array}{rrr} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

2. Cuando $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{19}{15}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

2. (1 punto) Hallar A^n.

(Modelo 2005 - Opción B)
Solución:

1.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

2. $A^n = 2^{n-1}A$

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

(Modelo 2007 - Opción B)
Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el Rango$(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M) = 2$.

2. Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$