Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + 1 = 0 \Longrightarrow m = -1$$

Si $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $A - BX = I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A - BX = I \Longrightarrow -BX = I - A \Longrightarrow BX = A - I \Longrightarrow X = B^{-1}(A - I)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular los valores de x para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x-1 \\ 1 & x-1 & x & x-2 \\ 1 & x-2 & x-2 & x \\ 1 & x-3 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x-1 \\ 1 & x-1 & x & x-2 \\ 1 & x-2 & x-2 & x \\ 1 & x-3 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2-\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3-\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4-\mathrm{F}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x-1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2-2\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3-3\mathrm{F}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Nunca se puede cumplir que el valor de este determinante sea cero, sea cual sea el valor de x.

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 & 0 \\ a & 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a.

Solución:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a+1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2a - a^2 = -a(2+a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = -2$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ a & -1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a - a^3 = -a(1+a^2) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 + a^2 + a = -a(a^2 - a - 1) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 0, \ \ a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ \ a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} a & a+1 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -3a^2 - a = -a(3a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = -\frac{1}{3}$$

El único valor que anula los cuatro determinantes es $a = 0$, para cualquier otro valor de a siempre hay alguno de ellos distinto de cero.

Cuando $a = 0$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar un menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Luego cuando $a = 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$, y cuando $a \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$.