

Problema 1 Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2X - B = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

(Extremadura (Junio 2006))

Solución

$$A^2X - B = AX \implies A^2X - AX = B \implies X = (A^2 - A)^{-1}B$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Encuentra el valor de a que hace que la siguiente matriz no tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja (Junio 2006))

Solución

$$|A| = 6 - a = 0 \implies a = 6$$

Para $a = 6$ la matriz A no tiene inversa.

Problema 3 Considere el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro m :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + (m+1)z = 0 \end{cases}$$

Discútalos y, además resuélvalos para los valores de m que lo hacen compatible

(Islas Baleares (Junio 2006))

Solución

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & m+1 & 0 \end{array} \right), \quad |A| = -2(m+1) = 0 \implies m = -1$$

- Si $m \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Determinado.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & m+1 \end{vmatrix}}{-2(m+1)} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{-2(m+1)} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2(m+1)} = 0$$

- Si $m = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Se observa que la tercera fila se obtiene de restar las dos primeras, por lo que se puede afirmar que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 Tres hermanos quieren reunir 26 euros para comprar un regalo a sus padres. Después de una larga discusión han decidido que el mediano debe poner el doble que el pequeño y el mayor debe poner dos terceras partes de lo que ponga el mediano, ¿Cuánto debe poner cada uno?

(La Rioja (Junio 2006))

Solución

Sea x euros del pequeño, y euros del mediano y z euros del mayor.

$$\begin{cases} x + y + z = 26 \\ y = 2x \\ z = 2y/3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \\ z = 8 \end{cases}$$