

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Diciembre 2005

Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2ay + z = a \\ ax - 6y + (a-2)z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a .
2. Resolver el sistema para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2a & 1 & a \\ a & -6 & a-2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = -2a^2 + 6a = 0 \implies a = 0, \quad a = 3$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema compatible determinado, con solución única.

Si $a = 0$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \implies$ Sistema incompatible.

Si $a = 3$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como tiene dos filas iguales podemos concluir con que el $\text{Rango}(\bar{A}) = 2$. Es decir, $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. El sistema sería:

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x - 6y = 3 - z \\ 2x + y = 1 - z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{9}{15} - \frac{7}{15}\lambda \\ y = -\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - I = BC - BX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - I = BC - BX \implies (A + B)X = BC + I \implies X = (A + B)^{-1}(BC + I)$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BC + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/17 & 2/17 \\ -1/17 & 5/17 \end{pmatrix}$$

$$X = X = (A+B)^{-1}(BC+I) = \begin{pmatrix} 3/17 & 2/17 \\ -1/17 & 5/17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/17 & 20/17 \\ -1/17 & -1/17 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Un bodegero tiene tres tipos de vino A , B y C , el primero lo vende a 3 euros el litro, el segundo a 5 y el tercero a 10. Le hacen un pedido de 2000 litros, y el cliente quiere pagarlo a 6 euros el litro, le da igual las combinaciones que quiera hacer el bodegero siempre que la cantidad que ponga del vino A sea un tercio de lo que ponga de la otras dos juntas. Se pide calcular la cantidad de litros que debe mezclar el bodegero.

Solución:

$$\begin{cases} x + y + z = 2000 \\ 3x + 5y + 10z = 12000 \\ x = \frac{1}{3}(y + z) \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 2000 \\ 3x + 5y + 10z = 12000 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 500 \\ y = 900 \\ z = 600 \end{cases}$$