

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Noviembre 2010

Problema 1 (5 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx - 2y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = m \\ 2x + y + mz = m \end{cases}$$

1. Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro m .
2. Resolver el sistema para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & m \\ 2 & 1 & m & m \end{array} \right), \quad |A| = 3m^2 - 3 = 0 \implies m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Determinado.

Si $m = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Luego $\text{Rango}(A) = 2$. Como

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

tenemos $\text{Rango}(\bar{A}) = 3$ En este caso $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A})$ y es un Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $m = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Luego $\text{Rango}(A) = 2$ y además $F_3 = F_1 + F_2 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$.
Tenemos que:

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas y es un Sistema Compatible Indeterminado. (Tiene infinitas soluciones)

2. Si $m = 1$:

$$\begin{cases} x- & 2y- & z = & 0 \\ x+ & 3y+ & 2z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/5 - (1/5)\lambda \\ y = 1/5 - (3/5)\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si $m = 0$:

$$\begin{cases} - & 2y- & z = & 0 \\ x+ & 3y+ & 2z = & 0 \\ 2x+ & y+ & = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos). Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $XB - A = I$.

(Andalucía (Junio 2009))

Solución:

1.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 12 = 3b \\ 2 = 2a \\ 3a = 3 \\ 3b = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

2. $XB - A = I \implies X = (I + A)B^{-1}$:

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (I + A)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos). Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

calcular:

1. $(A + B)^2$

2. $A^2 + B^2 + 2AB$

3. ¿Son iguales los resultados de los apartados anteriores? Razona la respuesta.

(Navarra (Junio 2009))

Solución:

1.

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Los resultados son distintos porque $A \cdot B \neq B \cdot A$