Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ m & 2 & 2 \\ -m & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 3 & m & 0 \\ m & 2 & 2 \\ -m & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6(m^2 - 1) = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m = 1$ o $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 1000 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b & b \\ -c+2d & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a = -a + 2b \Longrightarrow b = 0 \\ -b = b \Longrightarrow b = b \\ 2a + c = -c + 2d \Longrightarrow a = c - d \\ 2b + d = d \Longrightarrow b = 0 \end{array} \right.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} c-d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$.