

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Octubre 2006

Problema 1 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -X + Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \implies Y = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X - 2Y = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \implies X = \begin{pmatrix} 3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 4/3 \\ -1/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX + B = C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = C \implies X = A^{-1}(C - B)$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 + C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 + C_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Luego $\text{Rango}(A) < 3$, busquemos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Concluimos con que el $\text{Rango}(A) = 2$.