Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -9 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -9 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & m+2 \\ m & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & m+2 \\ m & -7 & 0 \end{vmatrix} = 2(2m^2 + 5m - 7) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -\frac{7}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = -7/2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -7/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 2/7 \\ 0 & 0 & -1/7 \\ 1 & 0 & -2/7 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 1000 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a & -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & 2a \\ c-2d & 2c \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a+2c = a-2b \Longrightarrow c = -b \\ b+2d = -2a \Longrightarrow b = -2a-2d \\ -2a = c-2d \Longrightarrow c = 2a+2d \\ -2b = 2c \Longrightarrow c = -b \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & -2a-2d \\ -b & d \end{pmatrix}$.