

Otras integrales

24. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2}{1+x^2} dx$ b) $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$ c) $\int \frac{2}{1-x^2} dx$ d) $\int \frac{2}{(1+x)^2} dx$ e) $\int \frac{2x}{(1+x)^2} dx$

Solución:

Obsérvese que las cinco integrales tienen cierto parecido. No obstante, sus resultados son muy diferentes.

a) Es inmediata: $\int \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x + c.$

b) También es inmediata: $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + c.$

c) Hay que hacerla por descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \ln(1+x) + \ln(1-x) + c$$

d) Es inmediata: $\int \frac{2}{(1+x)^2} dx = 2 \int (1+x)^{-2} dx = 2 \cdot \frac{(1+x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{2}{1+x} + c.$

e) Hay que hacerla por descomposición en fracciones.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(1+x)^2} dx &= \int \frac{2x+2-2}{(1+x)^2} dx = \int \frac{2(1+x)}{(1+x)^2} dx + \int \frac{-2}{(1+x)^2} dx = \int \frac{2}{1+x} dx - 2 \int (1+x)^{-2} dx = \\ &= 2 \ln(1+x) + \frac{2}{1+x} + c \end{aligned}$$

25. Propuestos en UNED. Resuelve:

a) $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1} dx$ b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ d) $\int 2 \ln x dx$

Solución:

a) Para resolver $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1} dx$ hay que transformar el integrando.

Dividiendo:

$$\frac{x^2-1}{4x^2+1} = \frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x^2+1} \rightarrow \text{(La división debe hacerse aplicando el algoritmo tradicional).}$$

Luego: $\int \left(\frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x^2+1} \right) dx = \int \frac{1}{4} dx - \frac{5}{8} \int \frac{2}{(2x)^2+1} dx = \frac{1}{4} x - \frac{5}{8} \arctan(2x) + c$

b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx \Rightarrow \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow A=2; B=3$

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = 2 \ln|x-2| + 3 \ln|x+2| + c$$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx \rightarrow$ Partes: $\left(\ln x = u; \quad \frac{1}{x^2} dx = dv \right) \Rightarrow \left(du = \frac{1}{x} dx; \quad v = -\frac{1}{x} \right)$

Luego: $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$

d) $\int 2 \ln x dx \rightarrow$ Partes: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego: $2 \int \ln x dx = 2 \left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

26. Resuelve:

a) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx$ b) $\int \cos^2 x dx$ c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10} dx$

Solución:

a) La $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx$ puede considerarse inmediata, de la forma $\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$, con

$f = \sqrt{x}$. En este caso: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx = \sin \sqrt{x} + c$

No obstante, puede ser más asequible hacer el cambio $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Obteniéndose:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx = \int \cos(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right) = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin \sqrt{x} + c$$

b) La integral $\int \cos^2 x dx$ puede hacerse por partes.

Haciendo: $u = \cos x$ y $\cos x dx = dv \Rightarrow du = -\sin x dx$; $v = \sin x$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \cos^2 x dx \Rightarrow 2 \int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + x \end{aligned}$$

Despejando: $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{x}{2} + k$

De otra forma: Haciendo el cambio trigonométrico $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, se tiene:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + k$$

c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10} dx \rightarrow$ Puede escribirse en el numerador la derivada del denominador.

Así:

$$\frac{7x+2}{x^2-6x+10} = \frac{\frac{7}{2}(2x-6)+23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2} \frac{(2x-6)}{x^2-6x+10} + \frac{23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2} \frac{(2x-6)}{x^2-6x+10} + \frac{23}{1+(x-3)^2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x+2}{x^2-6x+10} dx &= \int \frac{7}{2} \frac{(2x-6)}{x^2-6x+10} dx + \int \frac{23}{1+(x-3)^2} dx = \\ &= \frac{7}{2} \ln(x^2-6x+10) + 23 \arctan(x-3) + c \end{aligned}$$

27. Integra:

a) $\int \frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^x} dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$ c) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$ d) $\int \tan^2 x dx$ e) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Solución:

a) Sacando factor común en el numerador:

$$\int \frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^x(1 + e^x)}{1 + e^x} dx = \int e^x dx = e^x + c$$

b) Haciendo el cambio $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{t}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{t}{1+t}\right) dx = t - \ln(1+t) + c = e^x - \ln(1 + e^x) + c$$

c) Es inmediata, aunque puede hacerse el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Por tanto: $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{-1}{t^4} dx = -\int t^{-4} dt = -\frac{t^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{3t^3} + c = \frac{1}{3\cos^3 x} + c$

d) Sumando y restando 1 al integrando se tiene:

$$\int \tan^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = \tan x - x + c$$

e) Haciendo $x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt$; de donde:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^3}} dt = \arcsin t + c = \arcsin x^2 + c$$

28. (Propuesto en Selectividad, Aragón, junio 13 y septiembre 14)

a) Determina la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) La derivada de una función $f(x)$ es: $(x-1)^3(x-3)$. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$.

Solución:

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f'(x) = 2xe^{5x}$: $f(x) = \int 2xe^{5x} dx$.

Esta integral se hace por partes, tomando:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx; \quad dv = e^{5x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x}$$

Luego:

$$f(x) = \int 2xe^{5x} dx = 2x \cdot \frac{1}{5}e^{5x} - \int 2 \cdot \frac{1}{5}e^{5x} dx = \frac{2}{5} \left(xe^{5x} - \int e^{5x} dx \right) = \frac{2}{5} \left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x} \right) + c$$

Como $f(0) = 2$, entonces: $f(0) = \frac{2}{5} \left(0 - \frac{1}{5}e^0 \right) + c = 2 \Rightarrow c = 2 + \frac{2}{25} = \frac{52}{25}$.

Por tanto, $f(x) = \frac{2}{5} \left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x} \right) + \frac{52}{25}$.

b) La función pedida debe ser una primitiva de $(x-1)^3(x-3)$; esto es:

$$f(x) = \int (x-1)^3(x-3)dx$$

Operando:

$$(x-1)^3(x-3) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

Luego:

$$f(x) = \int (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + c$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$; y, por tanto: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

www.yoquieroaprobar.es