ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN CON AYUDA DE LA DERIVADA.

OPTIMIZACIÓN

Aplicaciones de la derivada: condiciones de máximo, mínimo, inflexión…

1. Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función polinómica de grado menor o igual a tres que tiene un mínimo relativo en (0, 0) y un máximo relativo en (2, 2). Calcular la expresión de dicha función.

Solución:

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se tiene:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

Por pasar por (0, 0), $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = d$
Por pasar por (2, 2), $f(2) = 2$ $\Rightarrow$ $2 = 8a + 4b + 2c + d$
Por mínimo en (0, 0), $f'(0) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = c$
Por máximo en (2, 2), $f'(2) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 12a + 4b + c$

Por tanto:

$d = 0$; $c = 0$; $a = -1/2$; $b = 3/2$

La función es:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

2. Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$ y como asíntota horizontal la recta $y = 3$. Razona si para $a = 2$ y $b = 3$ la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.

Solución:

Para que la recta x = 2 sea asíntota vertical de f(x) es necesario que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{bx}{x-a} = \infty$.

Como $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{bx}{x-a} = \dfrac{2b}{2-a} = \infty \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$.

Para que la recta $y = 3$ sea asíntota horizontal de f(x) es necesario que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{bx}{x-a} = 3$.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{bx}{x-a} = b \Rightarrow b = 3$.

Para $a = 2$ y $b = 3$ la función $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$.

Luego $f'(x) = \dfrac{3(x-2) - 3x}{(x-2)^2} = \dfrac{-6}{(x-2)^2}$

Como la derivada no se anula en ningún caso, la función no puede tener mínimos relativos (ni máximos).

3. Determina un punto de la curva $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

Solución:
La pendiente de la tangente es máxima en las soluciones de $y'' = 0$ (que son los puntos de inflexión) y que, además, verifican que $y''' < 0$.
Haciendo las derivadas se tiene:

$$y = xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = (-4x)e^{-x^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2} = (-6x+4x^3)e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y''' = (-6+12x^2)e^{-x^2} + (-6x+4x^3)(-2x)e^{-x^2} = (-6+24x^2-8x^4)e^{-x^2}$$

$$y'' = (-6x+4x^3)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -6x+4x^3 = 2x(-3+2x^2) \Rightarrow x = 0;\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y'''(0) = -6;\quad y'''(\pm\sqrt{3/2}) = (-6+36-18)e^{-3/2} > 0$$

El punto buscado es (0, 0).

4. ¿Existen máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \cos(x) + 1$ en el intervalo $[0,\pi]$? Justifica su existencia y calcúlalos.

Solución:
Los máximos y mínimos de una función, si los hay, se dan en los puntos que anulan su derivada. Además, en un máximo, la derivada segunda debe ser negativa, mientras, que en un mínimo debe ser positiva.

Derivando:

$$f'(x) = -\text{sen}\, x;\quad f''(x) = -\cos x$$

$$f'(x) = -\text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } \pi$$

$$f''(0) = -1;\quad f''(\pi) = 1$$

Por tanto, la función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = \pi$. Sus valores son: máximo: $f(0) = \cos(0) + 1 = 2$; mínimo: $f(\pi) = \cos(\pi) + 1 = 0$.

Ambos son absolutos, pues $-1 \le \cos x \le 1$.

5. Demuestra que la curva de ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) donde x_0 es el valor de x que hace mínima y''.

Solución:
Se hacen las derivadas sucesivas:

$$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$
$$y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$
$$y'' = 12x^2 - 6x + 2$$
$$y''' = 24x - 6 \;\Rightarrow\; y^{4)} = 24$$

Los puntos de inflexión se dan en las soluciones de la ecuación $y'' = 0$. Como $y'' = 12x^2 - 6x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales, la curva no tiene ningún punto de inflexión.

(En efecto: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-96}}{24}$ no es real.)

La función y'' se hace mínima (o máxima) en la solución de $y''' = 24x - 6 = 0$, que es $x = \dfrac{1}{4}$:

Efectivamente es mínimo pues $y^{4)} = 24 > 0$.
La ecuación de la tangente es:

$$y - f(1/4) = f'(1/4)(x - 1/4) \Leftrightarrow y - \frac{205}{256} = -\frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$f(1/4) = \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{205}{256};\quad f'(1/4) = 4\frac{1}{4^3} - 3\frac{1}{4^2} + 2\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$$

6. Sea f: **R** → **R** la función definida por $f(x) = e^x(ax+b)$, donde a y b son números reales.
a) Calcula los valores de a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto $(3, e^3)$.
b) Para los valores de a y b obtenidos, dígase qué tipo de extremo tiene la función en el punto mencionado.

Solución:
a) Que la función tenga un extremo relativo en el punto $(3, e^3)$ significa:
1.º $f(3) = e^3 \Leftrightarrow f(3) = e^3(3a+b) = e^3 \Rightarrow 3a + b = 1$
2.º $f'(3) = 0$. Como $f'(x) = e^x(ax+b) + ae^x \Rightarrow e^3(3a+b) + ae^3 = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$

Se tiene el sistema: $\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 4$

b) La función es $f(x) = e^x(-x+4)$, y sus derivadas primera y segunda:

$$f'(x) = e^x(-x+4) - e^x = e^x(-x+3);\quad f''(x) = e^x(-x+3) - e^x = e^x(-x+2)$$

Es evidente que $f'(3) = 0$, por tanto en ese punto se tiene un extremo.

Como $f''(3) = -e^3 < 0$, se trata de un máximo.

7. Considera la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

a) Calcula *c* sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa x = 0 es horizontal.

b) Para el valor de *c* hallado en el apartado anterior, calcula *a* y *b* sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = –2 y que corta al eje OX cuando x = 1.

c) Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcula los intervalos donde la función crece y decrece, sus extremos relativos y haz una representación gráfica aproximada.

Solución:

Derivada primera y segunda:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$$

a) Si la recta tangente en x = 0 es horizontal entonces $f'(0) = 0$.

Como $f'(0) = c \Rightarrow c = 0$.

La función será $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7$

b) Si la función tiene un extremo relativo en x = –2, entonces $f'(-2) = 0$.

Si corta al eje OX en x = 1, entonces $f(1) = 0$.

En consecuencia:

$$f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0 \Rightarrow 3a - b = 8$$
$$f(1) = 1 + a + b + 7 = 0 \Rightarrow a + b = -8$$

Resolviendo el sistema se obtiene: *a* = 0; *b* = –8.

c) La función será $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 16$.

- $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = -2$; $x = 2$. Estos puntos son posibles máximos o mínimos.

Para:

$x < -2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece;

$-2 < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece;

$0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece;

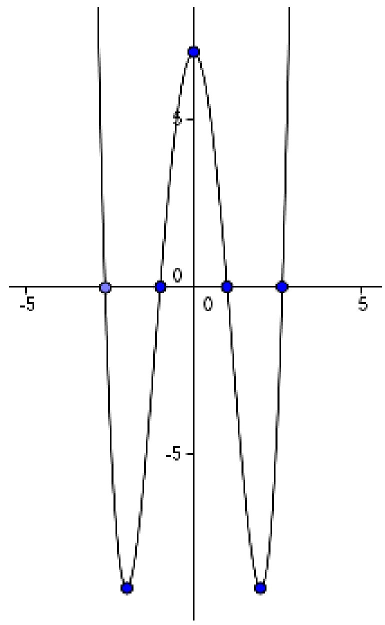
$x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece

Como:

$f''(-2) = 32 > 0$, en $x = -2$ hay un mínimo;

$f''(0) = -16 < 0$, en $x = 0$ hay un máximo;

$f''(2) = 32 > 0$, en $x = 2$ hay un mínimo.



Dando algunos valores podemos trazar su gráfica.

Puntos: (–2, –9); (–1, 0); (0, 7); (1, 0); (2, –9).

Además la curva corta a los ejes en las soluciones de $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$, que son $x = \pm\sqrt{7}$ y $x = \pm 1$.

Por tanto, la curva es la adjunta.

8. Halla razonadamente el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcula el valor de esta pendiente.

Solución:
El punto en el que la curva tiene recta tangente con pendiente máxima (o mínima) es un punto de inflexión de la curva.
(En efecto: la pendiente de la recta tangente a *f*(*x*) en un punto genérico *x* viene dada por el valor de $f'(x)$. El máximo de $f'(x)$ se obtiene cuando $\left(f'(x)\right)' = 0$: en las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$ que hacen negativa a la función $f'''(x)$. Por tanto, en los posibles puntos de inflexión de *f*(*x*).)

Calculamos las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow y''' = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$$

La derivada segunda se anula en $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Como $y'''(-1/\sqrt{3}) < 0$ y $y'''(1/\sqrt{3}) > 0$ la curva tiene recta tangente con pendiente máxima en el punto $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

El valor de esa pendiente es $y'(-1/\sqrt{3}) = \dfrac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2} = \dfrac{9}{8\sqrt{3}}$

9. Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + x - 1$ demuestra que existen α, β ∈ (1, 2) tales que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\beta) = 3$.
Di qué teorema utilizas.

Solución:
La función dada es continua en el intervalo [1, 2]. Además cumple que:

$$f(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = -1 < 0; \quad f(2) = 4 - 4 + 2 - 1 = 1 > 0$$

Por tanto, por ele teorema de Bolzano, existe un punto α ∈ (1, 0) tal que $f(\alpha) = 0$.

Se hace $f'(x)$:

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) - 2^x \ln 2 + 1$$

Esta función también es continua en el intervalo [1, 2]. Además:

$$f'(1) = 1(\ln 1 + 1) - 2\ln 2 + 1 = 2(1 - \ln 2) < 3; \quad f'(2) = 4(\ln 2 + 1) - 4\ln 2 + 1 = 5$$

Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, la función $f'(x)$ toma todos los valores comprendido entre $f'(1)$ y $f'(2)$. Luego existirá un valor β ∈ (1, 0) tal que $f'(\beta) = 3$.

Problemas y representaciones gráficas

10. Estudia el signo de las derivadas primera y segunda de cada una de las siguientes funciones, y determina en cada caso los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad y la convexidad.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{8}{1+x^2}$

Solución:

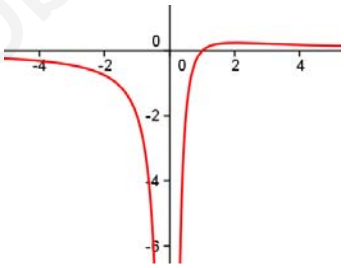
a) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x(x-1)}{x^4}=\dfrac{2-x}{x^3}$. Se anula en $x=2$.

- Si $x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $0<x<2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x>2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece. En consecuencia, en $x = 2$ hay un máximo.

La derivada segunda es: $f''(x)=\dfrac{-x^3-3x^2(2-x)}{x^6}=\dfrac{2x-6}{x^4}$, que se anula en $x = 3$. Luego:

- para $x<0$, $f''(x)<0 \to f(x)$ es convexa ($\cap$).
- para $0<x<3$, $f''(x)<0 \to f(x)$ es convexa ($\cap$).
- para $x>3$, $f''(x)>0 \to f(x)$ es cóncava ($\cup$).

En consecuencia, la función tiene un punto de inflexión en $x = 3$.



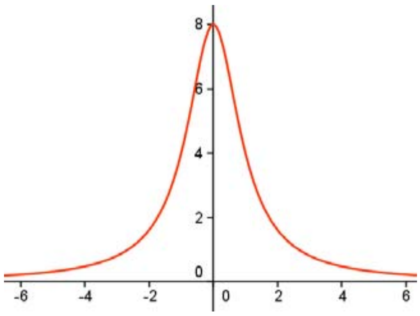
b) $f(x)=\dfrac{8}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow$

Se anula en $x = 0$; es positiva si $x < 0$ (crece), y negativa cuando $x > 0$ (decrece).

$$f''(x)=\frac{-16\cdot(1+x^2)^2+16x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-16\cdot(1+x^2)+16x\cdot 2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{48x^2-16}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{48x^2-16}{\left(1+x^2\right)^3}=0 \Rightarrow 48x^2-16=0 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{16}{48}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Si $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''(x)>0 \to f(x)$ es cóncava ($\cup$).
- $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''(x)<0 \to f(x)$ es convexa ($\cap$).
- Si $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''(x)>0 \to f(x)$ es cóncava ($\cup$).



11. Demuestra que la curva $f(x) = 2 - 2\cos x$ tiene un punto de inflexión en el intervalo (0, π) y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

Solución:
Para que f tenga un punto de inflexión es necesario que f'' se anule en algún punto del intervalo (0, π). Seria suficiente si, además, la derivada tercera en el punto hallado fuese distinta de 0.
Derivando:

$$f'(x) = 2\text{sen } x \Rightarrow f''(x) = 2\cos x \Rightarrow f'''(x) = -2\text{sen } x$$

$$f''(x) = 2\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2.$$

Como $f'''(\pi/2) = -2\text{sen }(\pi/2) = -2$, puede asegurarse que la función dada tiene un punto de inflexión en $x = \pi/2$.

- La ecuación de la recta tangente en el punto (x_0, y_0) es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$$f(\pi/2) = 2 - 2\cos(\pi/2) = 2;\ f'(\pi/2) = 2\text{sen }(\pi/2) = 2$$

Por tanto, la recta tangente es $y - 2 = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 2x - \pi + 2$.

12. Calcula los coeficientes a y b del polinomio $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ para que su gráfica pase por el punto (1, 1), teniendo aquí un punto de inflexión.
Solución:

$$p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1 \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 - 6x + b \Rightarrow p''(x) = 6ax - 6$$

Para que (1, 1) sea punto de inflexión debe cumplirse que $p(1) = 1$ y que $p''(1) = 0$.
De $p''(1) = 0 \Rightarrow 6a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1$.
Para que $p(1) = 1 \Rightarrow a - 3 + b + 1 = 1 \Rightarrow b = 2$.
Por tanto: $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

13. Determina a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2$ tenga un mínimo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 1/3$.
Solución:
Derivando dos veces:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 1 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

- Por tener un mínimo en $x = 2$, $f'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 12a + 4b - 1$
- Por tener un punto de inflexión en $x = 1/3$, $f''(1/3) = 0 \Rightarrow 0 = 2a + 2b$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 12a + 4b = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$ se obtiene que: $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{8}$

Por tanto, la función es $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - x + 2$.

14. Dada la función $f(x)=\dfrac{|x|}{1+x^2}$, se pide:

a) Calcula su derivada donde exista y justifica la no existencia de derivada donde proceda.

b) Haz su representación gráfica, determinando el punto de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento, los puntos de inflexión y las asíntotas de *f*.

Solución:

a) Al tratarse de una función definida mediante valor absoluto hay que distinguir los casos $x>0$ y $x\le 0$, siendo $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{1+x^2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{1+x^2} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

Esta función está definida y es continua en todo **R**. (El punto que presenta dificultades es $x=0$, pero es inmediato ver que $f(0^-)=f(0^+)=0$.)

- Derivando por separado se obtiene $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$

Como es fácil ver:

- cuando $x\to 0^-$, $f'(x)\to -1$; y cuando $x\to 0^+$, $f'(x)\to 1$

Por tanto, al no coincidir las derivadas laterales, la función no es derivable en el punto $x=0$.

b) Sólo hay un punto de corte con los ejes: el punto (0, 0). Para los restantes valores de *x*, la función siempre es positiva, pues su valor se obtiene como cociente de dos números positivos. En consecuencia, el punto (0, 0) es el mínimo absoluto de la función.

Al tratarse de una función par, pues $f(-x)=f(x)$, para estudiar el crecimiento, los extremos y los puntos de inflexión basta con considerar el signo de $f'(x)$ y de $f''(x)$ para $x>0$.

Derivada primera: $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

Si $x=1$, $f'(x)=0$.

Si $0<x<1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $x>1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

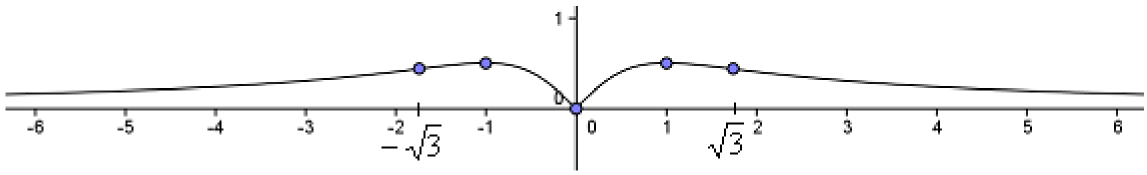
Por tanto: $f(x)$ es creciente si $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$; será decreciente cuando $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$. En los puntos $x=-1$ y $x=1$ tiene sendos máximos.

Derivada segunda: $f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

Si $x=\sqrt{3}$, $f''(x)=0 \Rightarrow$ en $x=\sqrt{3}$ hay un punto de inflexión. (Puede verse que $f''(x)$ cambia de signo a izquierda y derecha de $\sqrt{3}$.)

Asíntota: Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x|}{1+x^2}=0$, la recta $y=0$, el eje de abscisas, es asíntota horizontal de la función. (Como la función siempre es positiva, la curva se acerca al eje por encima de él.)

Dando algunos valores: (0, 0); (1, 0,5); ($\sqrt{3}$, 0,43); … se obtiene la gráfica que sigue.



15. Halla una función polinómica de tercer grado que tenga un extremo relativo en (1, 1) y un punto de inflexión en (0, 3).

Solución:

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ la función buscada. Por tanto, sus derivadas primera y segunda serán:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

Por pasar por (1, 1), $f(1) = 1$ $\Rightarrow$ $1 = a + b + c + d$

Por extremo en (1, 1), $f'(1) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 3a + 2b + c$

Por pasar por (0, 3), $f(0) = 3$ $\Rightarrow$ $3 = d$

Por PI en (0, 3), $f''(0) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 2b$

Sustituyendo $b = 0$ y $d = 3$ en las dos primeras ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} a + c = -2 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = -3 \text{ y } a = 1$$

La función es $f(x) = x^3 - 3x + 3$

16. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y además pase por el punto $(1, -1/e)$.

Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

$$f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x}$$

Para que la función tenga un extremo relativo en $x = 3$ es necesario que $f'(3) = 0$, luego:

$$f'(3) = (-9a + (2a - b)\cdot 3 + b)e^{-3} = 0 \Rightarrow -3a - 2b = 0$$

- Por pasar por el punto $(1, -1/e)$, esto es $f(1) = -\dfrac{1}{e} \Rightarrow (a + b)e^{-1} = -\dfrac{1}{e} \Rightarrow a + b = -1$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} -3a - 2b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = -3.$

La función será $f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x}$; siendo $f'(x) = (-2x^2 + 7x - 3)e^{-x}$.

- La ecuación de la recta tangente a $f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x}$ en el punto $(0, f(0))$ es:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Como $f(0) = 0$ y $f'(0) = -3$, la tangente es $y = -3x$.

17. Halla los puntos de la curva $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ en los que la pendiente de la recta tangente vale 1

Solución:

Hay que expresar la curva $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$, que es una elipse, en su forma explícita.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{2}=1-\frac{x^2}{4} \Rightarrow y^2=2\left(\frac{4-x^2}{4}\right) \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-x^2}$$

Como la pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada en el punto, hay que buscar los valores de x que hacen que $y'=1$. Esto es:

$$y'=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=1 \Rightarrow \pm\sqrt{2}x=2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow 2x^2=4\left(4-x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2=16-4x^2 \Rightarrow 6x^2=16 \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{6}}$$

Para $x=\frac{4}{\sqrt{6}} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-\frac{16}{6}}=-\frac{2}{\sqrt{6}}$. El punto es: $\left(\frac{4}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

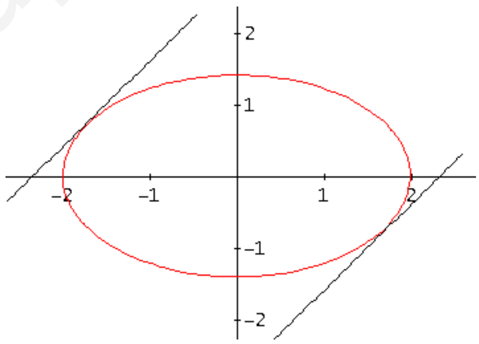
Para $x=-\frac{4}{\sqrt{6}} \Rightarrow y=+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-\frac{16}{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$. El punto es: $\left(-\frac{4}{\sqrt{6}},+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

- De otro modo, <u>mediante la derivación implícita</u>:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \frac{2x}{4}+\frac{2y\cdot y'}{2}=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{2y}$$

Como $y'=-\frac{x}{2y}=1 \Rightarrow x=-2y$. Sustituyendo en

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \frac{4y^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow 6y^2=4 \ \ldots$$



<u>Nota</u>: Puede venir bien hacer el dibujo adjunto.

18. Halla los valores del parámetro a, $a \neq 0$, para que las tangentes a la curva de ecuación $y=ax^4+2ax^3-ax+1512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

Solución:

En los puntos de inflexión la derivada segunda vale 0.

$$y=ax^4+2ax^3-ax+1512 \Rightarrow y'=4ax^3+6ax^2-a \Rightarrow y''=12ax^2+12ax$$

Como $y''=12ax^2+12ax=12ax(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$ o $x=0$.

Por tanto los puntos de inflexión se dan en $x=-1$ y en $x=0$.

Como $y'''=24ax+12a$, se cumple $y'''(-1)\neq 0$ y $y'''(0)\neq 0$; lo que confirma que para ambos valores se dan sendos puntos de inflexión.

En esos puntos la pendiente de la recta tangente vale:

- En $x=-1$, $y'(-1)=-4a+6a-a=a$
- En $x=0$, $y'(0)=-a$

Como deben ser perpendiculares: $y'(-1)=-\frac{1}{y'(0)} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{-a} \Leftrightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$.

19. Estudia el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos la función $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{e^x}$

Solución:

Derivando se tiene:

$$f'(x)=\frac{(4x-3)e^x-(2x^2-3x)e^x}{e^{2x}}=\frac{-(2x^2-7x+3)}{e^x}$$

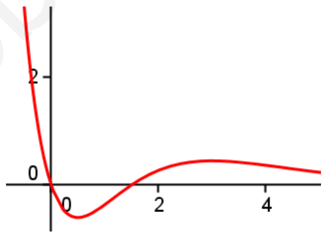
La derivada se anula cuando $2x^2-7x+3=0 \Rightarrow$ $x = 3$ y $x = 1/2$. Por tanto:

- Si $x < 1/2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.
- Si $1/2 < x < 3$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.
- Si $x > 3$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

Por la información anterior, y dado que f es continua para todo x, se deduce que en $x = 1/2$ la función tiene un mínimo relativo, y en $x = 3$ un máximo relativo.

También puede hacerse la derivada segunda y determinar su valor en esos dos puntos.

$$f''(x)=\frac{-(4x-7)e^x+(2x^2-7x+3)e^x}{e^{2x}}=\frac{2x^2-11x+10}{e^x}$$



Como $f''(1/2)=\dfrac{1/2-11/2+10}{e^{1/2}}>0$, en $x = 1/2$ la función tiene un mínimo.

Como $f''(3)=\dfrac{18-33+10}{e^3}<0$, en $x = 3$ la función tiene un máximo.

Con GeoGebra se obtiene su gráfica.

20. Halla los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de $f(x)=x(\ln x)^2$

Solución:

La función está definida en el intervalo $(0, +\infty)$.

Derivadas primera y segunda.

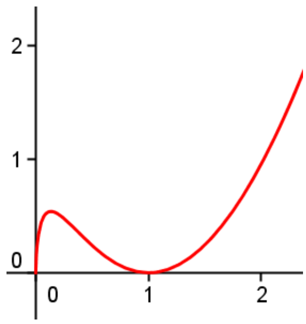
$$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=(\ln x)(\ln x+2)$$

$$f''(x)=2(\ln x)\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}(\ln x+1)$$

$f'(x)=(\ln x)(\ln x+2)=0 \Rightarrow \ln x=0$ o $\ln x=-2 \rightarrow x=1$ o $x=e^{-2}$. Por tanto:

- Si $0<x<e^{-2}$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente
- Si $e^{-2}<x<1$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente
- Si $x > 1$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente

Por ser $f''(e^{-2})=-2e^2<0$, en $x=e^{-2}$ se tiene un máximo relativo. Y como $f''(1)=2>0$, en $x = 1$ hay un mínimo.



Como $f''(x)=\dfrac{2}{x}(\ln x+1)=0$ cuando $x=e^{-1}$, en esa abscisa se da un punto de inflexión, ya que en ese punto la derivada segunda cambia de signo. (A su izquierda la función es cóncava, $\cap$; mientras que a su derecha es convexa, $\cup$)

Con GeoGebra puede hacerse su gráfica.

21. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de $f(x) = 2 - x + \ln x$.
Esboza la gráfica de *f*.

Solución:

La función está definida en el intervalo (0, +∞).

Derivadas primera y segunda:

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x}; \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

La derivada primera se anula cuando $x = 1$: $-1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$.

- Si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.
- Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.

Como la función crece a la izquierda de $x = 1$ y decrece a su derecha, en $x = 1$ hay un máximo.

La derivada segunda no se anula nunca: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. En consecuencia, la función siempre es cóncava (∩).

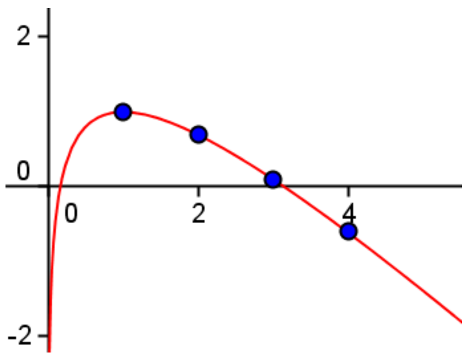
- Tiene una asíntota vertical, la recta $x = 0$, pues $\lim_{x \to 0^+} (2 - x + \ln x) = -\infty$.

La curva está a la derecha de la asíntota.

No tiene más asíntotas. Podría sospecharse que tiene otra asíntota oblicua, de la forma $y = mx + n$, pero aunque $m = -1$, el término $n \to \infty$, como se ve a continuación:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 - x + \ln x}{x} \right) = -1;$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x - mx) \right) = \lim_{x \to +\infty} (2 + \ln x) = +\infty$$



Dando algunos valores se traza la siguiente curva.

Valores:

(1, 1); (2, ln2 ≈ 0,7); (3, −1 + ln3 = 0,1); (4, –0,6)

22. Dada la función $f(x) = 2\operatorname{arctg} x - x$, determina su dominio, sus intervalos de crecimiento, sus máximos y sus mínimos.

Solución:

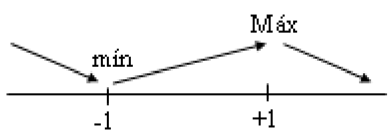
La función $\operatorname{arctg} x$ está definida para todo número real *x*, luego el dominio de $f(x) = 2\operatorname{arctg} x - x$ es **R**.

Derivada:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Esta derivada se anula cuando $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = +1$. Por tanto:

- Si $x < -1$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.
- Si $-1 < x < 1$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.



En consecuencia, en $x = -1$ se tiene un mínimo relativo

- Si $x > 1$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.

Luego en $x = 1$ se da un máximo relativo.

Más representación gráfica de una función

23. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$. Se pide:

a) Encontrar los intervalos donde esta función es creciente y donde es decreciente.
b) Calcular las asíntotas.
c) Hacer una gráfica de la función.

Solución:

a) El dominio de esta función es **R** − {−2, 2}.

Su derivada es:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2-3)}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

La derivada se anula en x = 0. Como además no está definida en x = −2 y en x = 2, hay que considerar los intervalos que indicamos a continuación:

- Si x < −2, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si −2 < x < 0, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si 0 < x < 2, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. (En x = 0 se tendrá un máximo relativo.)
- Si x > 2, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Nota: Podría observarse que la función es par.

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \infty \Rightarrow$ x = −2 es una asíntota vertical.

- Si $x \to -2^-$, $f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -2^+$, $f(x) \to -\infty$

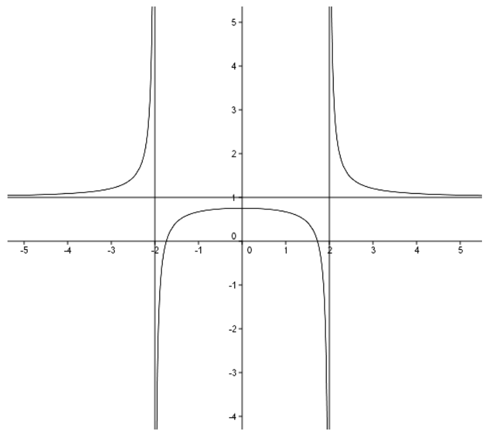
$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \infty \Rightarrow$ x = 2 es una asíntota vertical.

- Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = 1 \Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

(La recta va por debajo de la curva, pues $x^2 - 3 > x^2 - 4$.)

Su gráfica aproximada es la adjunta.



24. Dada la curva $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ se pide:

a) Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
b) Asíntotas, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos, si los hay.
e) Una representación aproximada de la misma.

Solución:
Como el denominador no se anula para ningún valor de x, el dominio de definición es todo **R**.
Corte con los ejes:

Si x = 0 $\Rightarrow$ y = −1. Punto (0, −1).
Si y = 0 $\Rightarrow$ $x^2 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ x = −1, x = 1. Puntos (−1, 0) y (1, 0).

b) No hay asíntotas verticales: la función nunca de va al infinito.

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow$ la recta y = 1 es asíntota horizontal de la curva, tanto hacia +∞ como hacia −∞.

c) Derivando:

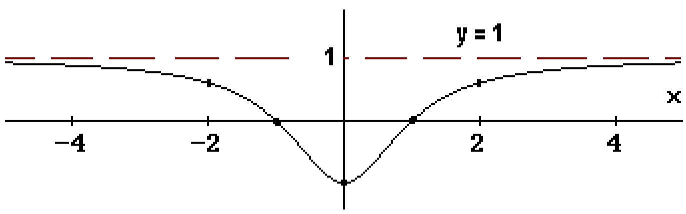
$$y' = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

- Si x = 0, y′= 0 $\Rightarrow$ en x = 0 puede haber máximo o mínimo.
- Si x < 0, y′< 0 $\Rightarrow$ la función es decreciente.
- Si x > 0, y′> 0 $\Rightarrow$ la función es creciente.

d) Como la función decrece a la izquierda de x = 0 y crece a su derecha, en x = 0 hay un punto mínimo.

También puede comprobarse viendo que y′′(0) > 0.
El efecto, como $y'' = \dfrac{4(x^2+1)^2 - 4x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \dfrac{4 - 4x^2}{(x^2+1)^3}$ $\Rightarrow$ y′′(0) = 4 > 0.

e) Además de la información obtenida puede verse que la curva es simétrica respecto del eje OY; si calculamos algunos valores más, como (−3, 8/10), (−2, 3/5); (2, 3/5), (3, 8/10), puede dibujarse la gráfica siguiente.



25. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. Halla el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y los extremos de *f*.
Traza un esquema de su gráfica.

Solución:
La función está definida para todo número real distinto de ±1: Dom (*f*) = **R** − {−1, 1}

- Crecimiento:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

La derivada se anula cuando x = 0, por tanto debemos estudiar lo que pasa en los intervalos: x < −1; −1 < x < 0; 0 < x < 1; x > 1

  - si x < −1, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ *f* es creciente;
  - si −1 < x < 0, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ *f* es creciente;
  - si 0 < x < 1, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ *f* es decreciente;
  - si x > 1, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ *f* es decreciente;

Como la derivada se anula en x = 0, es creciente si x < 0 y decreciente cuando x > 0, en x = 0 la función tiene un máximo.

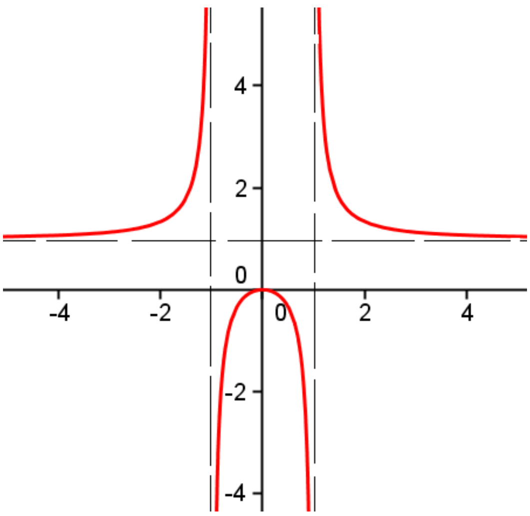
Para trazar su gráfica, además de lo dicho, puede observarse que:

- La función tiene dos asíntotas verticales, x = −1 y x = 1, y otra horizontal, y = 1.
  En efecto:

$$\lim_{x \to \pm 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty; \quad \lim_{x \to \pm\infty} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

- Algunos puntos de la gráfica son:
  (−2, 4/3); (−1/2, −1/3);
  (0, 0): máximo;
  (1/2, −1/3); (2, 4/3)

Así se obtiene la gráfica adjunta



26. a) Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) Demuestra que la sucesión $a_n=\dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)$

Solución:

a) Dom(f) = **R** − $\{-1\}$.

Asíntotas:

Tiene una asíntota vertical, la recta x = −1, pues $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{x+1}=\infty$.

Cuando x ⟶ -1^-, f(x) ⟶ +∞.
Cuando x ⟶ -1^+, f(x) ⟶ −∞.

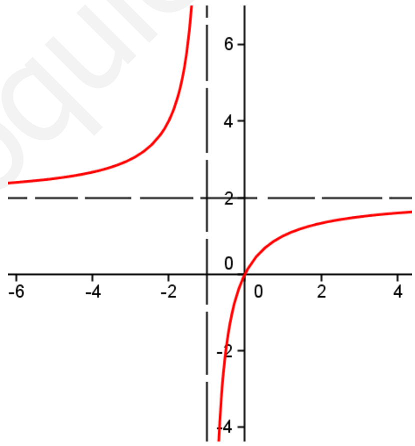
La recta y = 2 es una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+1}=2$.

Cuando x ⟶ −∞, f(x) ⟶ 2^+ (la curva va por encima de la asíntota.)
Cuando x ⟶ +∞, f(x) ⟶ 2^- (la curva va por debajo de la asíntota.)

Crecimiento:

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Como la derivada es positiva para todo x de su dominio, la curva es siempre creciente.
Su gráfica es la siguiente.



b) Una sucesión es monótona creciente cuando $a_{n+1}-a_n>0$, para todo n.
En este caso:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)}{(n+1)+1}-\frac{2n}{n+1}=\frac{(2n+2)(n+1)-2n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{(n+2)(n+1)},$$

que, efectivamente, es positivo para todo n.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+3n+2}=2$

27. Estudia y representa la función $y = e^{-x^4}$.

Solución:

- La función está definida para todo número real.
- Su recorrido es positivo: $e^{-x^4} > 0$.
- Es una función par: $e^{-(-x)^4} = e^{-x^4}$
- Tiene una asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^4} = 0^+$
- Crecimiento y decrecimiento:

  $y = e^{-x^4} \Rightarrow y' = -4x^3 e^{-x^4} \rightarrow$ se anula en x = 0

Si x < 0, $y\,' > 0 \Rightarrow$ la función crece.

Si x > 0, $y\,' < 0 \Rightarrow$ la función decrece $\Rightarrow$ En x = 0 hay un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y' = -4x^3 e^{-x^4} \Rightarrow y'' = -12x^2 e^{-x^4} + 16x^6 e^{-x^4} = 4x^2 e^{-x^4}(-3 + 4x^4) \rightarrow$$

$\rightarrow$ se anula en $x = \sqrt[4]{3/4} \approx \pm 0{,}93$ y en x = 0

Si $x < -\sqrt[4]{3/4}$, $y\,'' > 0 \Rightarrow$ la función convexa ($\cup$).

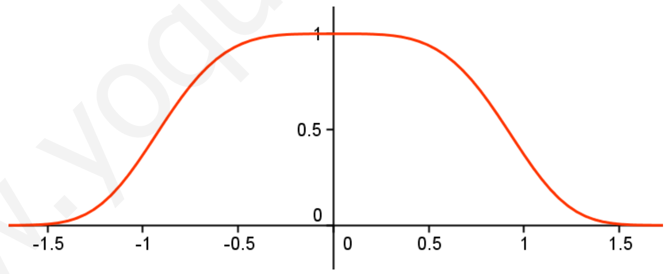
Si $-\sqrt[4]{3/4} < x < 0$, $y\,'' < 0 \Rightarrow$ la función cóncava ($\cap$).

Por la simetría: si $0 < x < \sqrt[4]{3/4}$ la función es cóncava y si $x > \sqrt[4]{3/4}$ será convexa.

Pueden darse algunos valores:

(−1, 1/e) ≈ (1, 0,37), (−0,5, 0,94), (0, 1); (0,5, 0,94), (1, 0,37)

Se obtiene la gráfica:



28. Representa gráficamente la función $f(x) = x^4 e^{-x}$.

Solución:
La función tiene una asíntota horizontal hacia +∞, pues:

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x} = [+\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to \text{(Aplicando la regla de L´Hôpital cuatro veces)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{24x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{24}{e^x} = 0.$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (hacia más infinito).

Derivadas:

$$f'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = x^3e^{-x}(4-x)$$
$$f''(x) = 12x^2e^{-x} - 4x^3e^{-x} - \left(4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}\right) = x^2\left(x^2 - 8x + 12\right)e^{-x}$$

La derivada primera se anula cuando $x = 0$ y $x = 4$, por tanto debe estudiarse lo que pasa en los intervalos: $x < 0$; $0 < x < 4$; $x > 4$.

- Si $x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;
- Si $0 < x < 4$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente;
- Si $x > 4$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;

Como la derivada se anula en $x = 0$, es decreciente si $x < 0$ y creciente cuando $x > 0$, en $x = 0$ la función tiene un mínimo. De manera análoga se concluye que en $x = 4$ hay un máximo.

La derivada segunda se anula en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 6$.

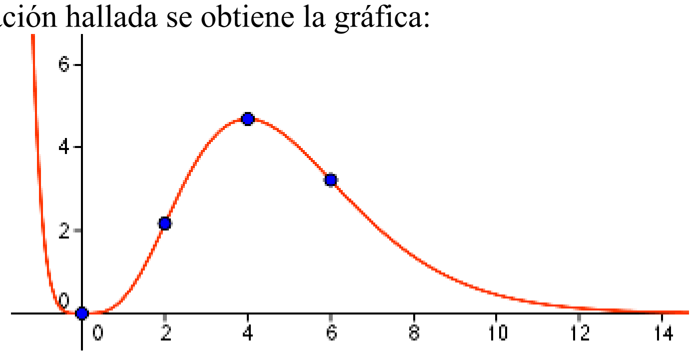
- Si $x < 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa (∪).
- Si $0 < x < 2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa (∪). En $x = 0$ no hay punto de inflexión, pues la función no cambia su curvatura.
- Si $2 < x < 6$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava (∩). En $x = 2$ hay un punto de inflexión.
- Si $x > 6$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa (∪). En $x = 6$ hay otro punto de inflexión.

Para trazar la curva conviene observar que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal hacia +∞, pues $\lim_{x\to+\infty} x^4e^{-x} = 0$.

La curva pasa por los puntos:

$(-1, e)$, $(0, 0)$, $(2, 16/e^2) \approx (2,\ 2{,}17)$, $(4, 256/e^4) \approx (4, 4{,}69)$, $(6, 1236/e^6) \approx (6, 3{,}21)$.

Con toda la información hallada se obtiene la gráfica:



PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. El consumo de un barco navegando a una velocidad de *x* nudos (millas/hora) viene dada por la expresión $C(x)=\dfrac{x^2}{60}+\dfrac{450}{x}$. Calcular la velocidad más económica y el coste equivalente.

Solución:
El consumo es mínimo en las soluciones de C´(x) = 0 que hacen positiva a C´´(x).

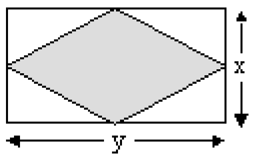
$$C(x)=\frac{x^2}{60}+\frac{450}{x} \Rightarrow C'(x)=\frac{2x}{60}-\frac{450}{x^2} \Rightarrow C''(x)=\frac{2}{60}+\frac{900}{x^3}$$

$$C'(x)=\frac{2x}{60}-\frac{450}{x^2}=0 \Rightarrow 2x^3-60\cdot 450=0 \Rightarrow x^3=30\cdot 450 \Rightarrow x=15\cdot 2^{2/3}$$

Como $C''(15\cdot 2^{2/3})=\dfrac{2}{60}+\dfrac{900}{30\cdot 450}$ > 0, para ese valor se obtiene el mínimo consumo.

Por tanto, la velocidad más económica es de $x=15\cdot 2^{2/3}\approx 23{,}81$ nudos.
El coste equivalente será: $C(15\cdot 2^{2/3})=\dfrac{15^2\cdot 2^{4/3}}{60}+\dfrac{450}{15\cdot 2^{2/3}}=\dfrac{45}{2^{2/3}}\approx 28{,}35$ u.m.

2. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región rectangular. ¿Cuáles son los valores de x e y , dimensiones del rectángulo, que hacen que el área del romboide, formado por la unión de los puntos medios de los lados, sea máxima?



Solución:
<u>Objetivo</u>: que el área del romboide sea máxima. Su área es la mitad que la del rectángulo. Por tanto:

Área del romboide: $A_R=\dfrac{x\cdot y}{2}$.

<u>Condición</u>: perímetro del rectángulo = 100 m $\to$ 100 = 2x + 2y $\Rightarrow$ $y=50-x$
Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x)=25x-\frac{1}{2}x^2$$

Esta función alcanza el máximo en las soluciones de A´(x) = 0 que hacen negativa a A´´(x).

$$A'(x)=25-x=0 \Rightarrow x=25$$

Como $A''(x)=-1<0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.
El valor de *y* será: $y=25$.

Por tanto, tanto el rectángulo como el romboide son cuadrados. El "rectángulo" tendrá lado 25; el "romboide" será un cuadrado de lado $\dfrac{25}{\sqrt{2}}$.

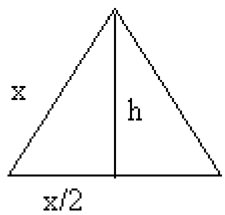
3. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región como la de la figura. ¿Cuáles son los valores de x e y que hacen que el área encerrada sea máxima?

Solución:
Se trata de un problema de optimización.

Objetivo: que el área de la figura sea máxima.

La figura está formada por un triángulo equilátero de lado x y por un rectángulo de lados *x* e *y*.

Área del triángulo: $A_T = \dfrac{x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} x^2$. Véase la figura.



La altura del triángulo es: $h = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$

Área del rectángulo: $A_R = xy$

Área total: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} x^2 + xy$

Condición: perímetro de la figura = 100 m $\rightarrow$ 100 = 3x + 2y $\Rightarrow$ $y = 50 - \dfrac{3}{2} x$

Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + 50x - \frac{3}{2} x^2$$

Esta función alcanza el máximo en las soluciones de A´(x) = 0 que hacen negativa a A´´(x).

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3} - 6}{2} x + 50 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{100}{6 - \sqrt{3}} = \frac{100(6 + \sqrt{3})}{33}$$

Como $A''(x) = \dfrac{\sqrt{3} - 6}{2} < 0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.

El valor de *y* será: $y = 50 - \dfrac{50(6 + \sqrt{3})}{11}$.

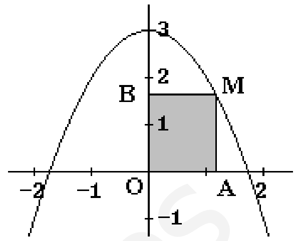
4. Considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica, M, situado en el primer cuadrante (x ≥ 0, y ≥ 0). Si por el punto M se trazan paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos, A y B, respectivamente.

a) Haz una gráfica de los elementos del problema.

b) Halla las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga área máxima.

Solución:

a) La curva es una parábola. Puede representarse dando valores.
La situación es la siguiente.



b) Si el punto M = (x, y), las coordenadas de A y B son: A = (x, 0) y B = (0, y).

El área del rectángulo será: *S = xy*

Como $y = 3 - x^2$, sustituyendo se tiene: $S(x) = x(3 - x^2) = 3x - x^3$

El máximo de S(x) se da en las soluciones de S´(x) = 0 que hagan negativa a S´´(x).

$$S'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1 \text{ (esta última no vale)}$$

Como $S''(x) = -6x$, se tiene que S´´(1) = −6 < 0; luego para ese valor de x se tendrá la superficie máxima.

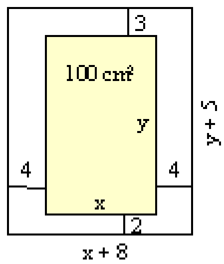
Por tanto M = (1, 2).

5. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.

Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:

Si las dimensiones de la parte impresa son x por y, el cartel será como el que dibujamos.



La cantidad de papel que se necesita, y que se desea que sea mínima, es:

$$S = (x + 8)(y + 5)$$

Con la condición de que xy = 100 ⇒ y = 100/x

Sustituyendo en S, queda:

$$S(x) = (x+8)\left(\frac{100}{x} + 5\right) \Rightarrow S(x) = 5x + \frac{800}{x} + 140$$

Esta función es mínima en las soluciones de S´= 0 que hacen positiva a S´´.

$$S'(x) = 5 - \frac{800}{x^2} \Rightarrow S''(x) = \frac{1600}{x^3}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 160 \Rightarrow x = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \Rightarrow y = \frac{100}{4\sqrt{10}} = 2{,}5\sqrt{10}$$

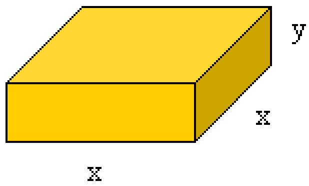
Como para ese valor S´´ es positiva se tiene la solución mínima buscada.

Las dimensiones del cartel deben ser:

ancho: $x + 8 = 8 + 4\sqrt{10}$ alto: $y + 5 = 5 + 2{,}5\sqrt{10}$

6. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

Solución:
Si x es el lado de la base e y la altura del prisma, el volumen será V = x^2y. Esta es la función que se desea hacer máxima.
Se sabe que 2x + 2y = 30 $\Rightarrow$ y = 15 – x.



Luego

$$V(x) = x^2y = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

El máximo de V se da en la solución de V´= 0 que hace negativa a V´´.

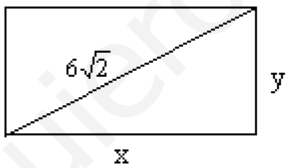
$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)\,; \qquad V''(x) = 30 - 6x$$

La derivada se anula para x = 0 y x = 10. Como V´´(!0) = –30 < 0, para ese valor se tiene el máximo buscado.

Las dimensiones serán 10 × 10 × 5; y el volumen 500 cm^3.

7. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.

Solución:
Los rectángulos son de la forma



Su perímetro es P = 2x + 2y, siendo la relación entre los lados $x^2 + y^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$.
Despejando ($y = \sqrt{72 - x^2}$) y sustituyendo en P queda:

$$P(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$$

El máximo de P se obtiene en las soluciones de P´(x) que hacen negativa a P´´(x).

$$P'(x) = 2 + \frac{2(-2x)}{2\sqrt{72 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 2\sqrt{72 - x^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 72 - x^2 \;\Rightarrow\; x = 6$$

En vez de hacer P´´(x), porque resulta engorrosa, podemos estudiar el signo de P´(x) a izquierda y derecha de x = 6. Así,

si x < 6, P´(x) > 0 $\rightarrow$ P(x) es creciente.
si x > 6, P´(x) < 0 $\rightarrow$ P(x) es decreciente

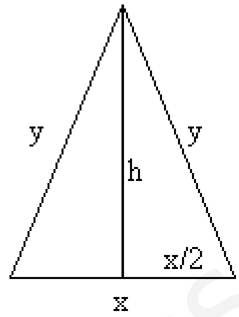
Como la función crece a la izquierda de x = 6 y decrece a su derecha, para x = 6 se da el máximo de P(x).

Si el lado x = 6, el otro lado vale también 6. Así pues, se trata de un cuadrado de lado 6.

8. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:

Sea el triángulo de la figura.



Su perímetro vale 8 ⇒ 2y + x = 8 ⇒ $y = \frac{8-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y = \frac{8-x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{64-16x+x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16-4x}$$

El área del triángulo es $A = \frac{x \cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor, $A(x) = \frac{x\sqrt{16-4x}}{2} = \sqrt{4x^2 - x^3}$

Para que A sea máxima: A´(x) = 0 y A´´(x) < 0:

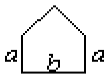
$$A'(x) = \frac{8x-3x^2}{2\sqrt{4x^2-x^3}} = 0 \Rightarrow 8x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 8/3$$

En vez de calcular la derivada segunda, que resulta muy engorroso, estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de A(x).

Para x < 0 no tiene sentido ver el signo de A´.
Para 0 < x < 8/3, A´(x) > 0 ⇒ A(x) crece.
Para x > 8/3, A´(x) < 0 ⇒ A(x) decrece.

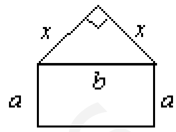
Como la función crece a la izquierda de x = 8/3 y decrece a su derecha, en x = 8/3 se da el máximo.

Por tanto, la base pedida es x = 8/3, mientras que la altura valdrá $h = \sqrt{16 - 4(8/3)} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

9. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90º. 

Calcula la longitud de los lados *a* y *b* para que el área de la ventana sea máxima.

Solución:
Suponemos que los dos lados superiores son iguales (el enunciado no lo dice, pero así lo sugiere la figura). Si su medida es x se tendrá:



Por Pitágoras: $x^2 + x^2 = b^2 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$

El perímetro es: $2a + b + 2x = 6 \;\rightarrow\; 2a + b + \dfrac{2b}{\sqrt{2}} = 6 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$

El área de la ventana es la suma del área de la sección rectangular más la de la sección triangular:

$$A = ab + \frac{x^2}{2} = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2} \cdot b + \frac{b^2}{4} \;\Rightarrow\; A(b) = \frac{12b - (1+2\sqrt{2})b^2}{4}$$

Para que A sea máxima: $A' = 0$; $A'' < 0$.

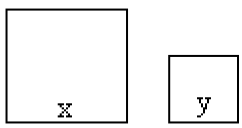
$$A'(b) = \frac{12 - 2(1+2\sqrt{2})b}{4} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$$

$$A''(b) = -\frac{(1+2\sqrt{2})}{2} < 0$$ $\rightarrow$ luego, para el valor de *b* hallado se tiene el máximo de A.

Si $b = \dfrac{6}{1+2\sqrt{2}} \rightarrow a = \dfrac{6 - \dfrac{6(1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$

10. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo henos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro? (2,5 puntos)

Solución:
Sean los cuadrados siguientes:



Perímetro = 4x + 4y = 100 cm
Superficie = $x^2 + y^2$
Coste = $2x^2 + 3y^2$

Despejando *y* en la ecuación del perímetro: $y = \dfrac{100 - 4x}{4} = 25 - x$

Sustituimos en la expresión del coste:

$$C(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2 \;\Rightarrow\; C(x) = 5x^2 - 150x + 1875$$

El coste será mínimo en la solución de $C'(x) = 0$ que haga positiva $C''(x)$.

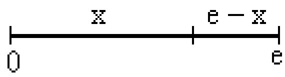
$$C'(x) = 10x - 150 = 0 \;\Rightarrow\; x = 15$$

Como $C''(x) = 10 > 0$, para ese valor de x = 15 se obtiene el mínimo buscado.

Por tanto, los lados deben ser de 15 cm y de 25 − 15 = 10 cm.

11. Descomponer el número *e* en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima. Calcular dicha suma.

Solución:
Sean los sumandos x y e –x:



Se desea que S(x) = ln x + ln(e – x) sea máxima.
El máximo se da en las soluciones de S´(x) = 0 que hacen negativa a S´´(x).

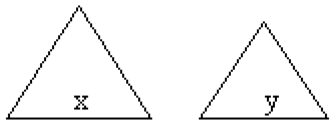
$$S'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e-x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{e-x}{x(e-x)} - \frac{x}{x(e-x)} = 0 \;\Rightarrow\; \text{e} - \text{x} - \text{x} = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{e}{2}$$

Como $S''(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{(e-x)^2}$ es suma de dos números negativos, S´´(x) < 0 para cualquier valor de x; en consecuencia, para $x = \frac{e}{2}$ se tendrá el máximo buscado.

La suma pedida es:

$$S = \ln\frac{e}{2} + \ln\frac{e}{2} = 2\ln\frac{e}{2} = 2(\ln e - \ln 2) = 2 - 2\ln 2$$

12. Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y. ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima.



Solución:
La altura del triángulo de lado x es:

$$h_x = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\,,$$

la del triángulo de lado y es, $h_y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

Se cumple que 3x + 3y = 60 ⇒ y = 20 – x

Se desea que $S = S_x + S_y = \frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} + \frac{y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + y^2)$ sea mínima.

Sustituyendo y = 20 – x, se tiene: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (20-x)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 40x + 400)$

Para que S sea mínima: S´= 0 y S´´ > 0:

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 10) = 0 \;\Rightarrow\; \text{x} = 10$$

Como $S'' = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, para ese valor de x = 10 se tiene el mínimo buscado.

En consecuencia, los lados será *x* = 10 e *y* = 10; o sea, dos triángulos equiláteros iguales.

13. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero.
Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

Solución:
Sean x, y, z los números.
Se sabe que $y = 2x$; y que $x + y + z = 60 \Rightarrow 3x + z = 60 \Rightarrow z = 60 - 3x$
El producto de los tres números es:

$$P = xyz = x \cdot 2x \cdot (60 - 3x) = -6x^3 + 120x^2$$

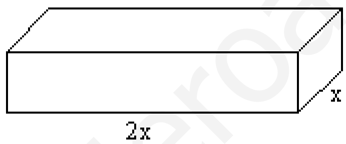
El producto en función de x es: $P(x) = -6x^3 + 120x^2$
Este producto es máximo en los valores de x que cumplen que $P'(x) = 0$ y $P''(x) > 0$

$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 6x(-3x + 40) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 40/3.$$

Como $P''(x) = -36x + 240$ se tiene que $P''(40/3) = -120 < 0$. Por tanto, el producto será máximo cuando $x = 40/3$.
Los otros dos números son $y = 2x = 80/3$; $z = 20$.

El producto máximo es $P = \frac{40}{3} \cdot \frac{80}{3} \cdot 20 \approx 7111{,}11$

14. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.



Solución:
Si su altura es h, el volumen de este paralelepípedo vale: $V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2h$
El área total de sus 6 caras es:

$$A = 2 \cdot (2x \cdot x) + 2 \cdot (2x \cdot h) + 2 \cdot (x \cdot h) \Rightarrow A = 4x^2 + 6xh$$

Como $V = 2x^2h = 9 \Rightarrow h = \frac{9}{2x^2}$

Sustituyendo en A: $A(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$

Esta función es mínima en las soluciones de $A' = 0$ que hacen positiva a A''.

$$A'(x) = 8x - \frac{27}{x^2} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Como $A''(x) = 8 + \frac{54}{x^3} > 0$ para todo $x > 0$, para $x = \frac{3}{2}$ se tiene la solución mínima.

Por tanto, el lado más largo valdrá 3, y la altura $h = \frac{9}{2(3/2)^2} = 2$

15. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x}$ se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.

c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En este caso:

$$f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow f(a)=\frac{1}{a}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(a)=-\frac{1}{a^2}$$

Se tendrá: $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$

b) Corte con eje OY, (se hace x = 0) $\Rightarrow$ $y=\frac{2}{a}$. Punto $\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

Corte con eje OX, (la y = 0) $\Rightarrow$ $0=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$. $\Rightarrow$ $x=2a$. Punto $(2a,0)$.

c) La distancia entre los dos puntos de corte es:

$$d=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{a^2}}$$

Esta distancia será mínima cuando lo sea su cuadrado, $d^2=D=4a^2+\frac{4}{a^2}$.

El valor mínimo se da en las soluciones de $D'=0$ que hagan $D''>0$.
(Derivamos con respecto a a.)

$$D'=8a-\frac{8}{a^3}=0 \Rightarrow 8a^4-8=0 \Rightarrow a=1 \text{ (la solución } a=-1 \text{ se descarta)}$$

Como $D''=8+\frac{24}{a^4}>0$, para $a = 1$ se dará el valor mínimo.