

2 Determinantes

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Calcular determinantes de orden 2.

B. Calcular, mediante la regla de Sarrus, determinantes de orden 3.

C. Utilizar las propiedades de los determinantes en el cálculo de determinantes de orden mayor o igual a 3.

D. Calcular el rango de una matriz mediante el uso de determinantes.

E. Calcular el rango de una matriz que depende de un parámetro.

F. Comprobar mediante determinantes si una matriz cuadrada es invertible.

G. Utilizar los determinantes para calcular la inversa de una matriz cuadrada regular.

G. Resolver ecuaciones matriciales en cuyo planteamiento intervienen matrices regulares de orden menor o igual a 3.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) & \operatorname{cos}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \operatorname{cos}(\beta) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \log(4) & \log(4) \\ \log(2) & \log(20) \end{vmatrix}$$

2. Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

3. a) Calcula, aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} ab & 2ac & 3a^2 \\ 2b^2 & bc & ab \\ 2bc & c^2 & 2ac \end{vmatrix}$$

b) Demuestra la igualdad:
$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 15 \end{pmatrix}$

5. a) Calcula, en función de x , el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

b) Calcula, en función de x , el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$:

a) Halla los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 2$, calcula la inversa de A .

7. Determina los valores de n para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ n & n+1 & n \\ 2n & 2n+1 & 2n+1 \end{pmatrix}$$

es regular y calcula su inversa, en caso de que exista, para $n = 0$.

8. Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluciones

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \\ = \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

$$\begin{vmatrix} \log(4) & \log(4) \\ \log(2) & \log(20) \end{vmatrix} = \log(4) \cdot \log(20) - \log(4) \cdot \log(2) = \\ = \log \frac{4 \cdot 20}{4 \cdot 2} = \log(10) = 1$$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 - 2 = -6$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - (cab + bca + abc) = \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

3. a) $\begin{vmatrix} ab & 2ac & 3a^2 \\ 2b^2 & bc & ab \\ 2bc & c^2 & 2ac \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} b & 2c & 3a \\ 2b & c & a \\ 2b & c & 2a \end{vmatrix} = \\ = a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3a^2 b^2 c^2$

b) $\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{aF_1}{bF_2} & 1 \\ \frac{bF_2}{cF_3} & abc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & abc \\ b^3 & b^2 & bca \\ c^3 & c^2 & cab \end{vmatrix} = \\ = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

4. a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 8 - (-1 - 72) = \\ = 53 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -21 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & -12 \\ 4 & -1 & 05 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -2 & 3 & 15 \\ 3 & 2 & -12 \\ 3 & 7 & 115 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

5. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{F_2+F_1}{F_3+F_1} \\ \frac{F_3+F_1}{F_4+F_1} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = \\ = (x+1)^3$

b) Si $x \neq -1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 4$.

Si $x = -1$, $|A| = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) < 4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -1 & 11 \\ -1 & -11 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

6. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3$

a) Si $a = 1$ o $a = 3$, $|A| = 0$; luego A no es regular; en caso contrario sí lo es, y, por tanto, tiene inversa.

b) Si $a = 2$, $|A| = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ n & n+1 & n \\ 2n & 2n+1 & 2n+1 \end{vmatrix} = 3n+1$

Si $n \neq -\frac{1}{3}$, $|A| \neq 0 \Rightarrow$ la matriz es regular.

Si $n = 0$, $|A| = 1$, y se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $AX - B + C = 0 \Rightarrow AX = B - C \Rightarrow X = A^{-1}(B - C)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 13 & 5 & 8 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 4 & 1 & 23 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

9. $\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 2E_1+E_2 \\ E_1-3E_2 \end{matrix}} \begin{cases} 7X = 2A + 2B \\ 7Y = A - 6B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{7}(A + B) \\ Y = \frac{1}{7}(A - 6B) \end{cases}$

$$X = \frac{2}{7} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{17}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$