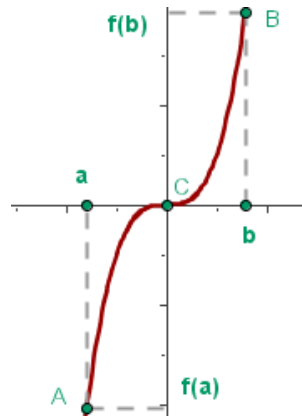


## Teorema de Bolzano

Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .



**Ejemplo 1:** Comprobar que la ecuación  $x^3 + x - 1 = 0$  tiene al menos una solución real en el intervalo  $[0,1]$ .

Consideramos la función  $f(x) = x^3 + x - 1$ , que es continua en  $[0,1]$  por ser polinómica. Estudiamos el signo en los extremos del intervalo:

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

Como los signos son distintos se cumple el teorema de Bolzano, por tanto existe un  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 0$ . Lo que demuestra que tiene una solución en ese intervalo.

**Ejemplo 2:** Comprobar que la ecuación  $x^3 - 3x + 40 = 0$  tiene alguna raíz real.

**Aproximar su valor hasta las centésimas.**

Consideremos la función  $f(x) = x^3 - 3x + 40 = 0$ , continua en todos los reales por ser una función polinómica.

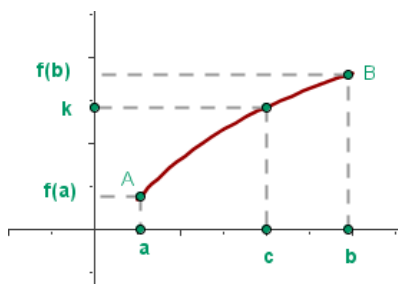
Tanteando, encontramos que  $f(-4) = -12$ ,  $f(-3) = 22$ .

Entonces,  $f$  es continua en  $[-4, -3]$  y como  $f(-4) < 0$  y  $f(-3) > 0$ , se cumple el teorema de Bolzano, por tanto existe un  $c \in (-4, -3)$  tal que  $f(c) = 0$ . La raíz de la ecuación es  $c$ .

Ahora tanteando con valores decimales, obtenemos  $f(-3,8) = -3,472$ ,  $f(-3,7) = 0,447$ . Por lo tanto, podemos asegurar que el número  $-3,7$  se aproxima en menos de una décima a una raíz de la ecuación dada.

## Teorema de los valores intermedios (Propiedad de Darboux)

Si una función es continua en el intervalo  $[a, b]$  y  $k$  es un número comprendido entre los valores  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe algún  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .



Si observamos el dibujo podemos definir la propiedad de Darboux de este otro modo:

Si una función es continua en el intervalo  $[a, b]$  la función alcanza en este intervalo todos los valores comprendidos entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

**Ejemplo:** Probar que la función  $f(x) = x(\sin x + 1)$  toma el valor 2.

La función es continua en toda  $\mathbb{R}$  por ser el producto de dos funciones continuas.

Tomamos el intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  y estudiamos el valor de las imágenes de los extremos:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 < 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi > 2$$

Por tanto existe un  $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tal que  $f(c) = 2$ .

**Consecuencias del teorema de los valores intermedios.**

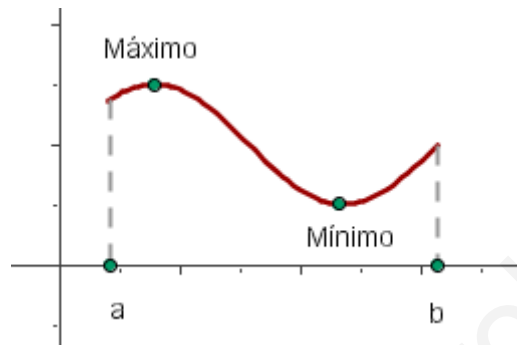
Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[a, b]$  y  $f(a) < f(b)$  y  $f(b) > f(a)$ , entonces existe un número  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = g(c)$ .

## Teorema de Weierstrass

Si una función  $f(x)$  está definida y es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f(x)$  alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo  $[a, b]$ .

Es decir, que hay al menos dos puntos  $x_1, x_2$  pertenecientes a  $[a, b]$  donde  $f$  alcanza valores extremos absolutos:

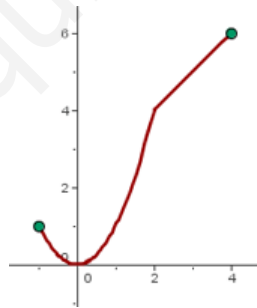
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{Si } x \in [a, b]$$



El **teorema de Weierstrass** no nos indica donde se encuentra el máximo y el mínimo, sólo afirma que existen.

### Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 2 \\ x + 2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ es continua en el intervalo } [-1, 4]$$



$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \rightarrow 0 \leq f(x) \leq 6 \quad \text{Si } x \in [-1, 4]$$

## Problemas del teorema de Bolzano

1. Demuestra que la función  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  corta al eje de las abscisas en el intervalo  $[0,2]$ . ¿Se puede decir lo mismo de la función:  $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$  ?

2. Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

¿Se puede afirmar que  $f(x)$  está acotada en el intervalo  $[1,4]$ ?

3. Sea la función  $f(x) = x^2 + 1$ . ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo  $[1,5]$ ?
4. Utilizando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación:  $x^3 + x - 5 = 0$ , tiene al menos una solución  $x = a$  tal que  $1 < a < 2$ .
5. Sea la función  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ . ¿Se puede afirmar que existe al menos un punto  $c$  en el interior del intervalo  $[1,2]$  tal que  $f(c) = 0$ ?
6. Justificar que la función polinómica  $f(x) = x^3 + x + 1$  tiene un cero comprendido entre  $-1$  y  $0$ .
7. Demostrar que la ecuación  $e^{-x} + 2 = x$  tiene al menos una solución real.
8. Demostrar que existe algún número real  $x$  tal que  $\sin x = x$ .
9. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7 - (16)^{\frac{1}{x}}}{1 + (16)^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestra que existe un punto del intervalo abierto  $(2, 4)$  en el que  $f$  toma el valor  $1$ .

## Ejercicios del teorema de Bolzano y de Weierstrass

1. Dada la función  $f(x) = x^3$ , estudiar si está acotada superiormente e inferiormente en el intervalo  $[1, 5]$  e indica si alcanza sus valores máximos y mínimos.
2. Probar que la función  $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 1$  es continua para toda  $\mathbb{R}$  y probar que existe al menos una raíz real de la ecuación  $x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$ .
3. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  y tales que  $f(a) > g(a)$  y  $f(b) < g(b)$ . Demostrar que  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = g(c)$ .

www.yoquieroaprobar.es