

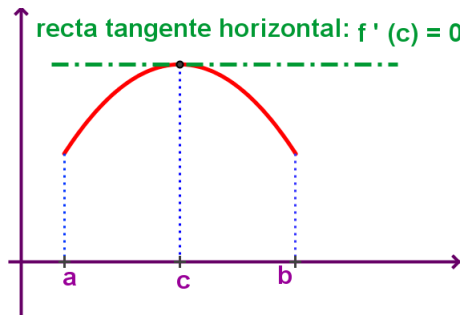
FUNCIONES DERIVABLES EN UN INTERVALO

Teorema de Rolle

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir $f(a) = f(b)$

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, con tangente horizontal.



Teorema de Rolle

Hipótesis: f es continua en $[a, b]$
 f es derivable en (a, b)
 $f(a) = f(b)$

Tesis: $\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$

Ejemplo 3

La función $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x$ verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en $[-2, 1]$ por ser polinómica
2. Es derivable en $(-2, 1)$ por ser polinómica.
3. $f(-2) = f(1) = -2$

Entonces existe un punto c en el intervalo abierto $(-2, 1)$ con derivada nula en dicho punto. Vamos a comprobarlo:

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow c = -1 \in (-2, 1)$$

Ejemplo 4

Determina k para que la función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis del T^a de Rolle en el intervalo $[-3, 1]$ y calcula el punto que vaticina el T^a.

→ La continuidad y derivabilidad se cumplen puesto que es una función polinómica, luego la única condición que hay que imponer es la 3^a:

$$f(-3) = f(1) \Rightarrow (-3)^3 - k(-3) + 10 = 1^3 - k \cdot 1 + 10 \Rightarrow -27 + 3k + 10 = 11 - k$$
$$4k = 28 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow f(x) = x^3 - 7x + 10$$

→ El valor que vaticina el T^a es:

$$f(x) = x^3 - 7x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7/3} \Rightarrow c = -\sqrt{7/3} \in (-2, 1)$$

Ejemplo 5: Aplicación del teoremas de Rolle

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x) = 0$ tiene 1 única solución $\Rightarrow f(x) = 0$ tiene 2 soluciones como máximo

Solución

La demostración se hace por reducción al absurdo es decir negar "tiene 2 soluciones como máximo"

Se supone que $f(x) = 0$ tiene 3 soluciones: $\exists c_1 < c_2 < c_3$ tales que $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$

Por tanto se puede aplicar el T^a de Rolle a la función f en los intervalos $[c_1, c_2]$ y $[c_2, c_3]$

En ambos intervalos se cumplen las hipótesis del T^a Rolle, luego:

$\exists d \in (c_1, c_2)$ y $\exists d' \in (c_2, c_3)$ tales que $f'(d) = f'(d') = 0$ en contradicción con " $f'(x) = 0$ tiene 1 única solución" por tanto no se puede suponer que $f(x) = 0$ tiene 3 soluciones

Por tanto $f(x) = 0$ tiene 2 soluciones como máximo

Se demuestra en general que:

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x) = 0$ tiene n única soluciones $\Rightarrow f(x) = 0$ tiene $n + 1$ soluciones como máximo

Ejemplo 6: Aplicación conjunta de los teoremas de Bolzano y de Rolle

Demuestra que la ecuación $x^5 + 5x + 1 = 0$ sólo admite una solución real

Solución

1°. Se considera la función $f(x) = x^5 + 5x + 1$ continua y derivable en \mathbb{R} luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del T^a Bolzano:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = 7 > 0$$

$$f(-1) = 5 > 0$$

$$f(-2) = -41 < 0$$

3°. Por tanto en el intervalo $[-2, -1]$ se cumplen las hipótesis del T^a de Bolzano, luego:

$\exists c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$ que equivale a decir que la ecuación $x^5 + 5x + 1 = 0$ tiene una solución c en el intervalo $(-2, -1)$

4°. Es única:

Se supone que tiene 2 soluciones: $\exists c_1 < c_2$ tales que $f(c_1) = f(c_2) = 0$

En el intervalo $[c_1, c_2]$ se cumple las hipótesis del T^a Rolle, luego:

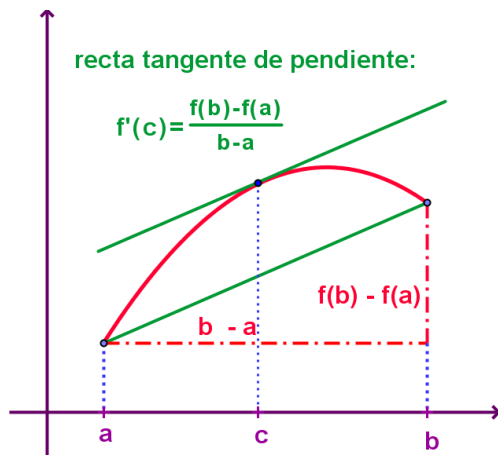
$\exists d \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(d) = 0$ pero $f'(x) = 5x^4 + 5 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ por tanto no se puede suponer que $f(x) = 0$ tiene 2 soluciones

Teorema del valor medio o de Lagrange

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Teorema del Valor Medio

Hipótesis: f es continua en $[a, b]$
 f es derivable en (a, b)

Tesis: $\exists c \in (a, b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica: Existe un punto en la curva cuya tangente es paralela a la cuerda que une los extremos.

Ejemplo 7

Sea $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 3x^2 - 6$ que es continua y derivable en su dominio. Por el teorema del valor medio:

$$\exists c \in (-1, 2) / f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{6-(-3)}{3} = 3$$

$$f(x) = 3x^2 - 6 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Teorema de Cauchy

Si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) ,

existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Ejemplo 8

Halla el valor de c del intervalo $(0, 3)$ donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = -2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4$

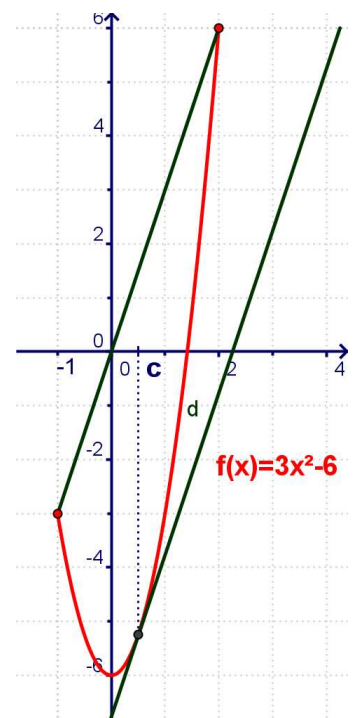
→ Las funciones son continuas y derivables en todo \mathbb{R} por ser funciones polinómicas

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = -2 \Rightarrow f'(c) = -2 \\ g'(x) = 2x \Rightarrow g'(c) = 2c \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{-2}{2c} = \frac{-1}{c}$$

→ Valores de las funciones en los extremos del intervalo:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 4 \text{ y } f(3) = -2 \\ g(0) = -4 \text{ y } g(3) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{g(3)-g(0)} = \frac{-2-4}{5-4} = \frac{-2}{3}$$

$$\rightarrow \text{Luego } \frac{-2}{3} = \frac{-1}{c} \Rightarrow -2c = -3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (0, 3)$$



Regla de L'Hôpital

Esta regla permite obtener fácilmente ciertos límites y dice:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También se puede aplicar para cuando $x \rightarrow \infty$ y la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

La regla puede aplicarse una o más veces, mientras se mantenga la indeterminación.

Ejemplo 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 10

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+x) - \text{sen} x}{x \cdot \text{sen} x} &= \frac{\text{Ln}(1+0) - \text{sen} 0}{0 \cdot \text{sen} 0} = \frac{0}{0} \text{ (aplicamos la regla de L'Hôpital)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+x) - \text{sen} x}{x \cdot \text{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\text{sen} x + x \cdot \cos x} = \frac{\frac{1}{1+0} - \cos 0}{\text{sen} 0 + 0 \cdot \cos 0} = \frac{0}{0} \text{ (aplicamos L'Hôpital)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \text{sen} x}{\cos x + \cos x - x \cdot \text{sen} x} = \frac{\frac{-1}{(1+0)^2} + \text{sen} 0}{\cos 0 + \cos 0 - 0 \cdot \text{sen} 0} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 11

Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - a(e^x - 1)}{(e^x - 1) \cdot 2x} \right) = \frac{0}{0} \text{ ind (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - ae^x}{e^x \cdot 2x + (e^x - 1) \cdot 2} \right) = \frac{2 - a}{0}$$

Como me dicen que el límite existe y es finito el numerador ha de ser cero para poder seguir aplicándole la Regla de L'Hôpital, es decir $2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a = 2$, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2e^x}{e^x \cdot 2x + (e^x - 1) \cdot 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2e^x}{e^x \cdot 2x + 2e^x + 2e^x} \right) = \frac{-2}{0 + 2 + 2} = \frac{-1}{2}$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{e^{2x} - 1} = \frac{0}{0} \text{ L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos x \cdot (-\text{sen} x)}{2 \cdot e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \text{sen} x}{e^{2x}} = \frac{0}{1} = 0$$