

TEOREMAS ANÁLISIS

FICHA 2

1) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Hallar a para que se pueda aplicar el teorema del valor medio de Lagrange en $[0,2]$. Calcular el/los c vaticinados por el teorema.

2) Estudia si la siguiente función verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2,0]$

$$f(x) = \frac{1}{1+|1+x|}$$

3) Prueba que existe un punto P de la gráfica de la función $f(x) = 4x^2 - 1$ tal que la tangente a dicha gráfica en P es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(1'5,8)$.

4) Demuestra que la función $f(x) = e^x + x$ tiene una raíz única.

5) Sea f una función definida en el intervalo $[-1,1]$ y dos veces derivable, tal que $f''(x) = x$. Además se cumple que $f'(0) = f(0) = 1$. Calcula cuántos ceros tiene exactamente la función f en el intervalo $(-1,1)$

SOLUCIONES

$$1) f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{tiene que ser continua en } [0,2] \text{ y derivable en } (0,2)$$

Continuidad: cada trozo es continuo, pero también tiene que serlo en $x = 1$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 3 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - ax^2) = 3 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{ax} = \frac{2}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 - a = \frac{2}{a} \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Derivabilidad, cada trozo es derivable, pero también tiene que serlo en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -2ax & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{ax^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow -2a = -\frac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

luego f es continua y derivable para $a = 1$, hallemos c : $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\exists c \in (0,2) / f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \rightarrow \begin{cases} -2c = \frac{1-3}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,2) \\ -\frac{2}{c^2} = -1 \rightarrow c = \pm\sqrt{2} \rightarrow c = \sqrt{2} \in (0,2) \end{cases} \quad \text{dos } c$$

2) Teorema de Rolle, tiene que ser continua en $[-2,0]$, derivable en $(-2,0)$ y además tiene que cumplirse que $f(-2) = f(0)$

$$f(-2) = \frac{1}{1+|-1|} = \frac{1}{2}; \quad f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{SI}$$

Continuidad: f es cociente de dos funciones continuas y NO es continua donde se anula el denominador, pero éste no se anula para ningún valor de x , luego **f es continua en el intervalo dado $[-2,0]$**

$$\text{Derivabilidad: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+1+x} & \text{si } 1+x \geq 0 \\ \frac{1}{1-(1+x)} & \text{si } 1+x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x} & \text{si } x \geq -1 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2+x)^2} & \text{si } x > -1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x < -1 \end{cases} \rightarrow f'(-1^+) = \frac{-1}{1} = -1 \neq f'(-1^-) = 1 \quad \text{NO derivable}$$

NO cumple las hipótesis del teorema del Valor Medio

3) $f(x) = 4x^2 - 1$, función polinómica, continua y derivable en \mathbb{R} , en particular en el intervalo $(1, 1.5)$, luego podemos aplicar en dicho intervalo el teorema del valor medio. $f'(x) = 8x$

$$\exists c \in (1, 1.5) / f'(c) = \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1} \rightarrow 8c = \frac{8 - 3}{0.5} \rightarrow c = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \in (1, 1.5)$$

4) $f(x) = e^x + x$ es una función continua en \mathbb{R} (exponencial + polinómica), podemos aplicar el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo que encontremos en que la función cambie de signo, veamos:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0 \rightarrow \exists c \in (-1, 0) / f(c) = 0 \text{ (AL MENOS UN } c)$$

para probar que es exactamente una la raíz real, estudiamos el crecimiento de la función dada: $f'(x) = e^x + 1 > 0$ en todo $\mathbb{R} \rightarrow f$ es creciente en $\mathbb{R} \rightarrow$ solución única

$$5) f''(x) = x \rightarrow f'(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$f(0) = f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{0}{2} + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$f(x) = \int \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x^3}{6} + x + k \rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow \frac{0}{6} + 0 + k = 1 \Rightarrow k = 1$$

La función es: $f(x) = \frac{x^3}{6} + x + 1$ ahora, vamos a hallar el número de ceros en el intervalo $(-1, 1)$, primero veamos que tiene algún cero, utilizando el teorema de Bolzano:

f es continua en $[-1, 1]$, ya que es una función polinómica

$$f(1) = \frac{1}{6} + 1 + 1 > 0$$

$$\rightarrow \exists c \in (-1, 1) / f(c) = 0 \text{ al menos uno}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{6} - 1 + 1 < 0$$

Por otra parte sabemos $f'(x) = \frac{x^2}{2} + 1 > 0$ siempre $\rightarrow f$ es creciente, por lo que la función tiene un único cero en el intervalo $(-1, 1)$