

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$

- Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- Dibujar su gráfica.
- Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x=0$, $x=5$ y el eje OX.

$$f(x) = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si } x \leq 4 \\ 2x(x-4) & \text{si } x > 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 8x - 2x^2 & \text{si } x \leq 4 \\ 2x^2 - 8x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Las dos ramas de la función son parábolas, con lo que sabemos que son continuas y derivables en todos los puntos salvo quizás en $x=4$. Estudiemos, en ese punto, la continuidad y derivabilidad de la función.

$$f(4) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (8x - 2x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x^2 - 8x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es}$$

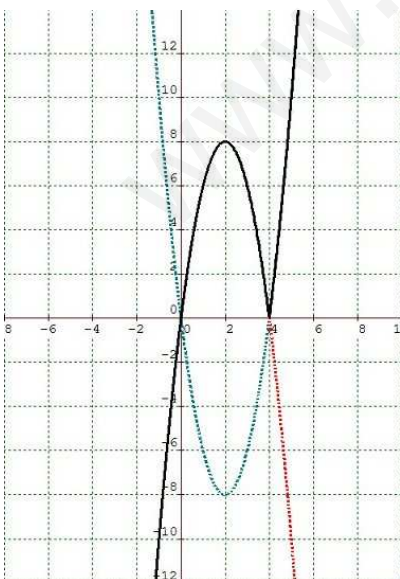
continua en $x=4 \Rightarrow f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'_-(4) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{8(4+h) - 2(4+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(-2h-8)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-2h-8) = -8$$

$$f'_+(4) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(4+h)^2 - 8(4+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(2h+8)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (2h+8) = 8$$

$f'_-(4) \neq f'_+(4) \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=4$

Vamos a representar gráficamente la función teniendo en cuenta que está compuesta por dos trozos de parábolas.



$y = 8x - 2x^2$ corta al eje OX en los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$

$y' = 8 - 4x \Rightarrow$ tiene un máximo en el punto $(2,8)$

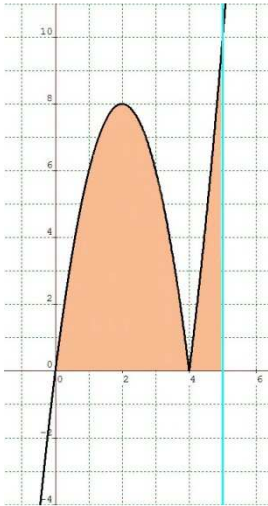
la gráfica se correspondería con la parábola de trazo rojo

$y = 2x^2 - 8x$ corta al eje OX en los mismos puntos $(0,0)$ y $(4,0)$

$y' = 4x - 8 \Rightarrow$ tiene un mínimo en el punto $(2,-8)$

la gráfica se correspondería con la parábola de trazo azul

La gráfica de $f(x)$ la representamos en negro y se obtiene a partir de la primera parábola en el intervalo $(-\infty, 4]$ y de la segunda en $(4, +\infty)$



El área pedida se corresponde con la zona coloreada

$$A = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx + \int_4^5 (2x^2 - 8x) dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^4 + \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right]_4^5 =$$

$$= \left[\left(64 - \frac{128}{3} \right) - 0 \right] + \left[\left(\frac{250}{3} - 100 \right) - \left(\frac{128}{3} - 64 \right) \right] = 26$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$

b) $\int x \cdot (\ln x)^2 dx$

c) $\int \frac{1}{x^3 + 2x} dx$

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2} = (L' \text{ H\^o}pital) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x}{-2 \cos x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \operatorname{sen} x}{-2 \operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$

b) $\int x (\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int x \cdot \ln x \cdot dx =$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\}$$

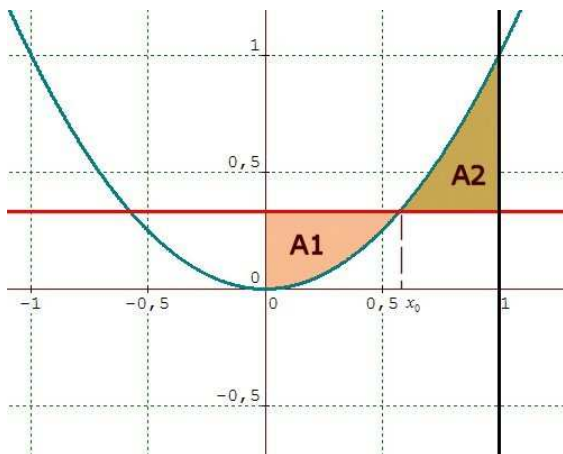
$$= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right] = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C$$

c) $\int \frac{1}{x^3 + 2x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{\frac{1}{2}x}{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 2) + C$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + M = 0 \\ N = 0 \\ 2A = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ M = -\frac{1}{2} \\ N = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde a es un número real con $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.



Se trata de encontrar el valor de "a" para que $A_1 = A_2$

$$A_1 = \int_0^{x_0} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} = ax_0 - \frac{x_0^3}{3}$$

$$A_2 = \int_{x_0}^1 (x^2 - a) dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax \right]_{x_0}^1 = \frac{1}{3} - a - \left(\frac{x_0^3}{3} - ax_0 \right)$$

$$\text{entonces } ax_0 - \frac{x_0^3}{3} = \frac{1}{3} - a - \frac{x_0^3}{3} + ax_0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

Se define la función $g(x) = \int_0^{\text{sen } x} f(t) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

$$g(x) = \int_0^{\text{sen } x} f(t) dt \Rightarrow g(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$$

según el teorema fundamental del cálculo integral $g'(x) = \frac{1}{1+e^{\text{sen } x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{1+e^{\text{sen } x}}$

$$\text{entonces } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = (L' \text{ H\^o}pital) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1+e^{\text{sen } x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0}{0}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x-4) + 17$. Demuestra que la función derivada $f'(x)$ posee al menos una raíz real en el intervalo $(0, 4)$.

$f(x)$ es una función continua y derivable en \mathbb{R} por ser suma y producto de funciones continuas y derivables; en particular $f(x)$ es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$ y además $f(0) = f(4)$

$$f(0) = 0^2 \cdot \operatorname{sen}(0-4) + 17 = 17$$

$$f(4) = 16 \cdot \operatorname{sen}(0) + 17 = 17$$

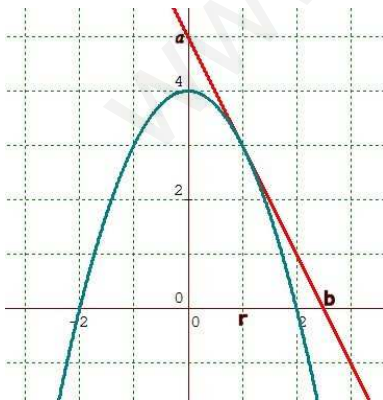
entonces estamos en las condiciones del teorema de Rolle por lo que podemos concluir que existe $x_0 \in (0, 4)$ tal que $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x)$ posee, al menos, una raíz en el intervalo $(0, 4)$.

También puede resolverse aplicando el th. de Bolzano a $f'(x)$ en el intervalo $[0, 4]$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r$, con $r > 0$.

- Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
- Calcular el área de la región limitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.



Calculemos la recta tangente a la parábola en el punto $x = r$
punto de tangencia $P = (r, 4 - r^2)$; $y' = -2x \Rightarrow m = y'(r) = -2r$

$$r_{ig} \equiv y - (4 - r^2) = -2r(x - r), \quad r_{ig} \equiv y = -2rx + r^2 + 4$$

cortamos la recta con los ejes de coordenadas

$$a = r_{ig} \cap OY \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2rx + r^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow a = (0, r^2 + 4)$$

$$b = r_{ig} \cap OX \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -2rx + r^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow b = \left(\frac{r^2 + 4}{2r}, 0 \right)$$

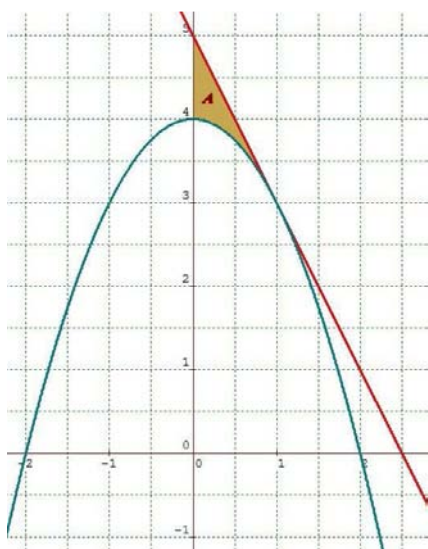
El triángulo $T(r)$ tiene por base b y por altura a

$$\text{la función área será } A(r) = \frac{\frac{r^2 + 4}{2r} \cdot (r^2 + 4)}{2}, \quad A(r) = \frac{(r^2 + 4)^2}{4r}$$

Busquemos el mínimo de la función área ; $A'(r) = \frac{16r^2(r^2+4) - 4(r^2+4)^2}{16r^2}$; $A'(r) = 0$

$$16r^2(r^2+4) - 4(r^2+4)^2 = 0 \Rightarrow 4(r^2+4)(3r^2-4) = 0 \Rightarrow 3r^2-4=0 \Rightarrow r = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

como $r > 0 \Rightarrow$ el área del triángulo es mínima cuando $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$



La recta tangente a la parábola en el punto (1,3) es $y = -2x + 5$

el área pedida es la región sombreada A

$$A = \int_0^1 [(-2x+5) - (4-x^2)] dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula:

a) $\int_0^{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{1+3x^2} dx$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

$$a) \int_0^{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{1+3x^2} dx = \frac{1}{6} \int_0^{\sqrt{5}} 6x(1+3x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{6} \left[\frac{(1+3x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{5}} = \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{16^3}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{128}{3} - \frac{2}{3} \right) = 7$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = (\text{dividiendo todo por } 6^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

- Calcula las asíntotas, los puntos extremos y esboza la gráfica de $f(x)$.
- Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y la recta de ecuación $4x+5y-5=0$.

La función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ no tiene asíntotas verticales puesto que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, ($4x^2+1 \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ es asíntota horizontal}$$

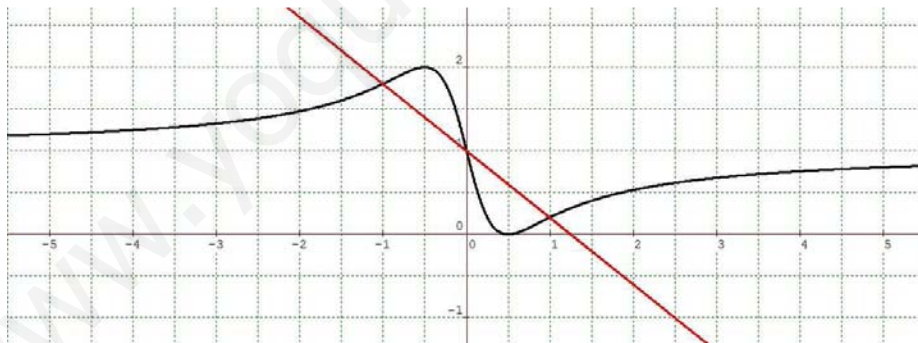
no tiene asíntota oblicua

$$f'(x) = \frac{(8x-4)(4x^2+1) - 8x(4x^2-4x+1)}{(4x^2+1)^2} = \frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}; f'(x)=0 \Rightarrow 16x^2-4=0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{32x(4x^2+1)^2 - 2(4x^2+1)8x(16x^2-4)}{(4x^2+1)^4} = \frac{96x-128x^3}{(4x^2+1)^3}; \begin{cases} f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{1}{2} \text{ hay un mínimo } \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{en } x = -\frac{1}{2} \text{ hay un máximo } \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \end{cases}$$

$f(x)$ corta a los ejes en los puntos $(0, 1)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; $f''(x)=0 \Rightarrow 32x(3-4x^2)=0$; en $x=0$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ hay puntos de inflexión.

Dibujamos las gráficas y calculamos el área pedida.



$$\frac{1}{2}A = \int_0^1 \left(\frac{5-4x}{5}\right) dx - \int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} dx = \frac{1}{5} [5x-2x^2]_0^1 - \left[x - \frac{1}{2} \ln(4x^2+1) \right]_0^1 = \frac{3}{5} - \left(1 - \frac{\ln 5}{2}\right) = \frac{5\ln 5 - 4}{10} \Rightarrow A = \frac{5\ln 5 - 4}{5}$$

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right) dx = \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{8x}{4x^2+1} dx = x - \frac{1}{2} \ln(4x^2+1)$$