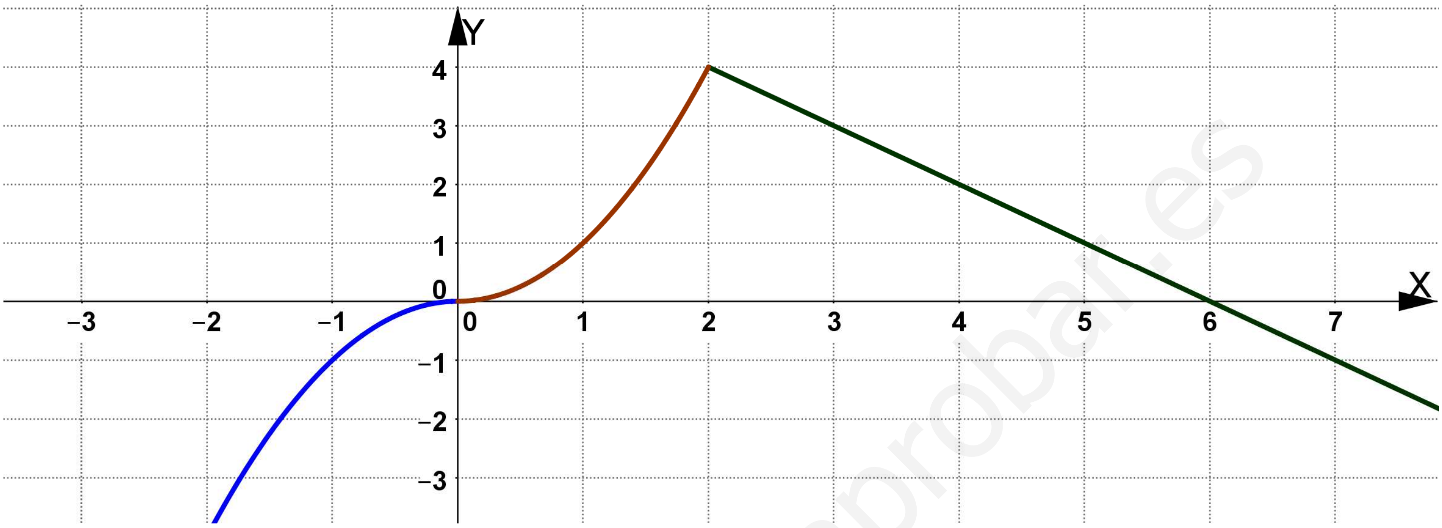
Ejercicio 35 Sea f: R → R la función definida por $f(x)=\begin{cases} x\,|x|, & si\ x\le 2 \\ 6-x, & si\ x>2 \end{cases}$

(a) Esboza la gráfica de f.

$$Como\ |x|=\begin{cases} x, & si\ x\ge 0 \\ -x, & si\ x<0 \end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases} |x|\,x=-xx=-x^2, & si\ x<0 \\ |x|\,x=xx=x^2, & si\ 0\le x\le 2 \\ 6-x, & si\ x>2 \end{cases}$$



(b) Estudia la derivabilidad de f.

Para $x\neq 0$ *y* 2, f *es derivable (y por tanto continua) porque las funciones polinómicas son derivables; además* $f'(x)=\begin{cases} -2x, & si\ x<0 \\ 2x, & si\ 0<x<2. \\ -1, & si\ x>2 \end{cases}$

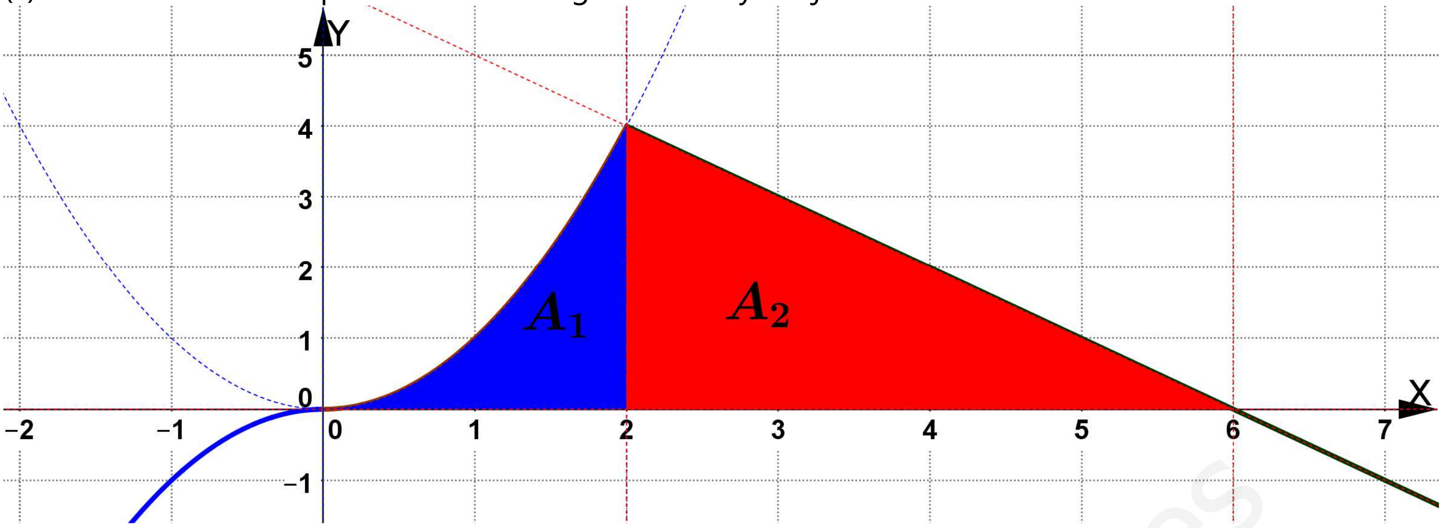
$$Para\ x=0,\ f(0)=0^2=0\ ,\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow f\ es\ continua\ en\ x=0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-2x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x)=0 \end{cases} \Rightarrow f\ es\ derivable\ en\ x=0\ \ y\ \ f'(0)=0$$

$$Para\ x=2,\ f(2)=2^2=4\ ,\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(6-x)=4 \end{cases} \Rightarrow f\ es\ continua\ en\ x=2$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f\ no\ es\ derivable\ en\ x=2$$

(c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.



$$A_1 = \int_0^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \qquad A_2 = \text{A(triángulo)} = \frac{base\ .\text{altura}}{2} = \frac{4\ .\ 4}{2} = 8$$

Por tanto, el área pedida es $A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{32}{3}\ u^2}$

Ejercicio 36 Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & si\ \ x \geq 0 \\ x e^{-x^2}, & si\ x < 0 \end{cases}$

(a) Estudia la derivabilidad de f en x = 0 y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

Para $x \neq 0$, *f es derivable (y por tanto continua) porque las funciones elementales son derivables; además* $f'(x) = \begin{cases} e^x, & si\ x > 0 \\ 1.e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2x), & si\ x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x, & si\ x > 0 \\ e^{-x^2}(1-2x^2), & si\ x < 0 \end{cases}$

Para $x = 0$, $f(0) = e^0 - 1 = 0$, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x\,e^{-x^2}) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f$ *es continua en* $x = 0$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-x^2}(1-2x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} (e^x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f$ *es derivable en* $x = 0$ *y* $f'(0) = 1$

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta x = −1.

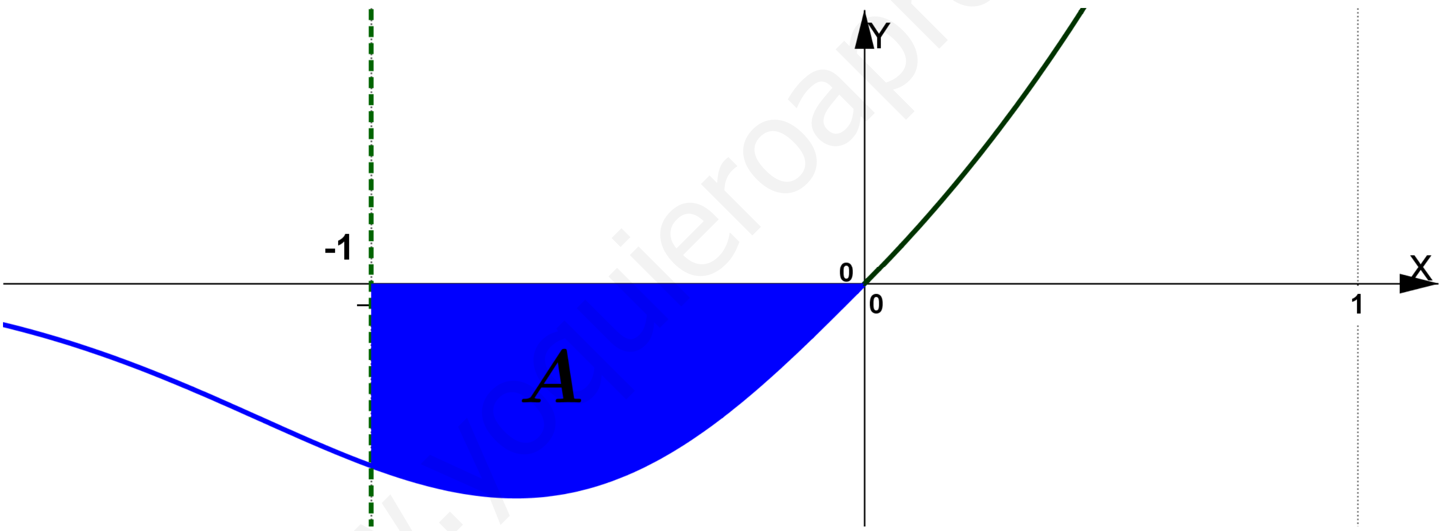
Para esbozar la gráfica de f podemos basarnos en que:

$$* \text{ Los puntos de corte con el eje de abcisas: } f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 0 \\ ó \\ x\,e^{-x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0;\ O(0,0)$$

$$* \text{ La monotonía y extremos: } f'(x) = \begin{cases} e^x = 0 \ (\text{imposible, pues } e^x > 0) \\ ó \\ e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-2x^2=0 \to x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}})$	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$
comportamiento de $f(x)$	*decreciente*	*creciente*

Mínimo relativo para $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$



$$A = -\int_{-1}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$$

$$\int x\,e^{-x^2}\,dx \to \begin{cases} t = -x^2 \\ dt = -2x\,dx \to x\,dx = \frac{-1}{2}dt \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{2}\int e^t\,dt = \frac{-1}{2}e^t + k = \frac{-e^{-x^2}}{2} + k$$

$$\text{Por tanto, el área pedida es } \mathrm{A} = -\left.\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_{-1}^{0} = \left.\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left(\frac{e^{-0^2}}{2}\right) - \left(\frac{e^{-(-1)^2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = = \boxed{\frac{e-1}{2e}\,u^2}$$

Ejercicio 37 Sea f: (0, ∞) → R definida por f(x) = 1 + ln(x)

a) Comprueba que la recta $y=1+\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e

$rtg: y = f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)$; en este caso, $x_0=e$; $f(x_0)=f(e)=1+\ln(e)=2$

Como $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x_0)=f'(e)=\frac{1}{e} \rightarrow rtg: y=\frac{1}{e}(x-e)+2 \rightarrow \boxed{rtg: y=\frac{x}{e}+1}$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisa y la recta tangente del apartado a)

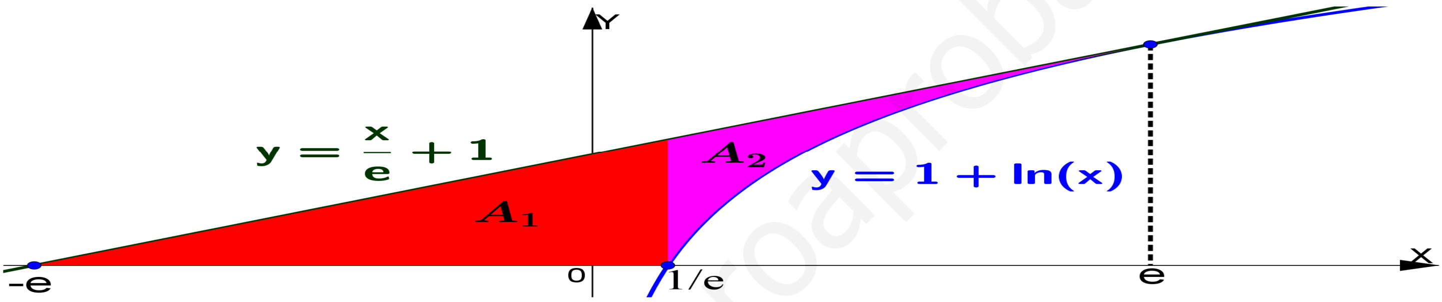
Para esbozar el recinto tenemos en cuenta:

* *Donde corta la gráfica de f al eje X:* $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

* *El punto de tangencia de la gráfica de f con la recta tangente:* $(e,2)$

* *Donde corta* la rtg *al* el eje X: $0=\frac{x}{e}+1 \Leftrightarrow x=-e$

* *Que f es creciente porque* $f'(x)=\frac{1}{x}>0$, *pues* $x>0$



$$A_1=\int_{-e}^{1/e}\left(\frac{x}{e}+1\right)dx=\left(\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg]_{-e}^{1/e}=\left(\frac{1}{2e}x^2+x\right)\Bigg]_{-e}^{1/e}=$$

$$=\left(\frac{1}{2e}\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{2e}(-e)^2-e\right)=\frac{1}{2e^3}+\frac{1}{e}-\frac{e^2}{2e}+e=\frac{1}{2e^3}+\frac{1}{e}-\frac{e}{2}+e=\frac{1}{2e^3}+\frac{1}{e}+\frac{e}{2}$$

$$A_2=\int_{1/e}^{e}\left[\left(\frac{x}{e}+1\right)-(1+\ln(x))\right]dx=\int_{1/e}^{e}\left(\frac{x}{e}-\ln(x)\right)dx$$

$$\int\left(\frac{x}{e}-\ln(x)\right)dx=\int\frac{x}{e}\,dx-\overbrace{\int\ln(x)\,dx}^{Por\ partes\ (ya\ hecha\ en\ el\ tema)}=\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}-[x\ln(x)-x]+\text{k}=\frac{1}{2e}x^2-x\ln(x)+x+k$$

$$A_2=\left(\frac{1}{2e}x^2-x\ln(x)+x\right)\Bigg]_{1/e}^{e}=\left(\frac{1}{2e}e^2-e\ln(e)+e\right)-\left(\frac{1}{2e}\frac{1}{e_2}-\frac{1}{e}\overbrace{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}^{Vale\ -1}+\frac{1}{e}\right)=$$

$$=\frac{e}{2}-e+e-\frac{1}{2e^3}-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e^3}-\frac{2}{e}$$

Por tanto, el área pedida es $A=A_1+A_2=\left(\frac{1}{2e^3}+\frac{1}{e}+\frac{e}{2}\right)+\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2e^3}-\frac{2}{e}\right)=\frac{-1}{e}+e=\boxed{\frac{e^2-1}{e}u^2}$

Ejercicio 37 bis Sea f: R → R la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área.

Para esbozar el recinto tenemos en cuenta:

* *Donde corta la gráfica de f a los ejes:*

$$Eje\ X:\ f(x)=0 \Leftrightarrow xe^{-x}=0 \Leftrightarrow x=0 \qquad Eje\ Y:\ x=0\ ,\ y=f(0)=0.$$

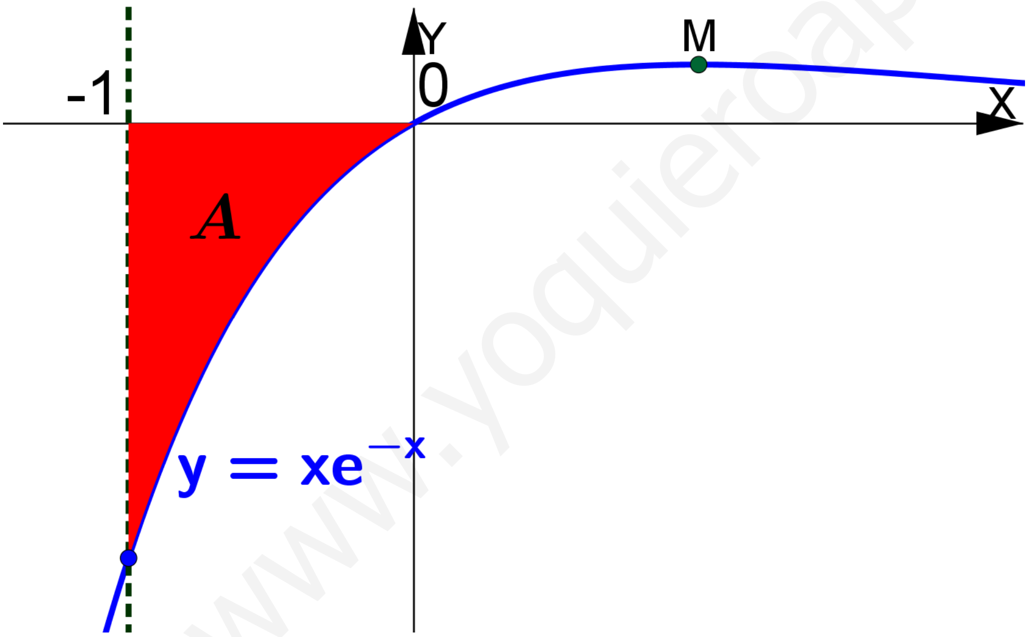
Luego, sólo corta en $(0,0)$

* *Donde corta la gráfica de f a la recta* $x=-1$: $\begin{cases} x=-1 \\ y=xe^{-x} \end{cases} \Rightarrow y=-1.e^{-(-1)}=-e$

* *La monotonía y extremos de f:* $f'(x)=1e^{-x}+xe^{-x}(-1)=\overbrace{e^{-x}}^{Es>0}(1-x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Intervalo	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$
comportamiento de $f(x)$	*creciente*	*decreciente*

Máximo relativo: $M\,(1,f(1)) \to Como\ f(1)=1.e^{-1}=\frac{1}{e}$, *el máximo es* $M(1,\frac{1}{e})$



$$A=-\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx=\int_{-1}^{0} -xe^{-x}\,dx; \qquad \int -xe^{-x}\,dx \xrightarrow{Por\ partes} \begin{cases} u=-x & du=-dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{cases}$$

$$xe^{-x}-\int e^{-x}dx=xe^{-x}-(-e^{-x})=e^{-x}(x+1).$$

$$Por\ tanto,\ A=e^{-x}(x+1)\Big]_{-1}^{0}=e^{0}(0+1)-e^{1}(-1+1)=\boxed{1\ u^2}$$

Ejercicio 38 Considera la función f: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.
(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2.

$$a)\ y\ b)\ f'(x) = e^x + 4e^{-x}(-1) = e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = 4e^{-x} = \frac{4}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln(4) = 2\ln(2) \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

Intervalo	$(-\infty, \ln 2)$	$(\ln 2, \infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$
comportamiento de $f(x)$	*decreciente*	*creciente*

$$\text{Mínimo relativo: } M(\ln 2, f(\ln 2)) \to \text{Como } f(\ln 2) = e^{\ln 2} + 4e^{-\ln 2} = 2 + \frac{4}{e^{\ln 2}} = 2 + 2 = 4$$

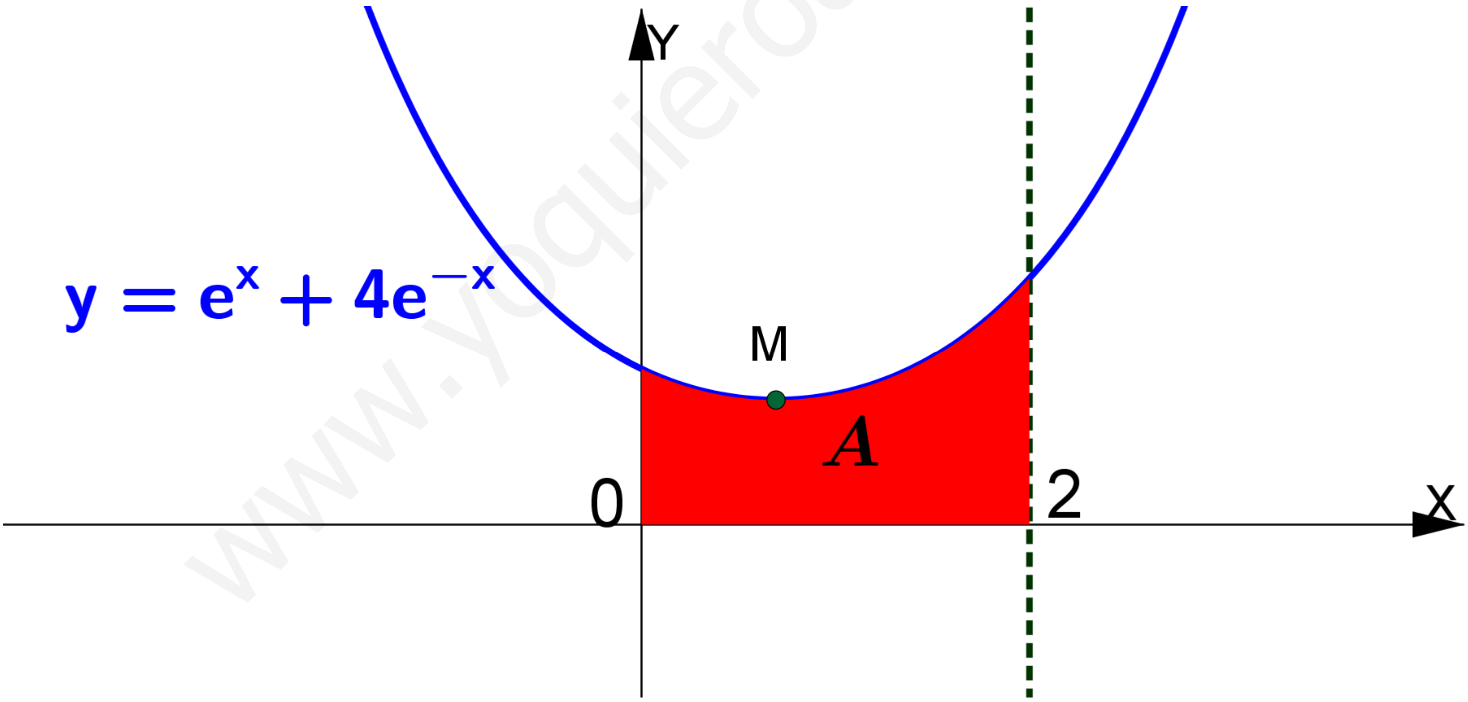
El *mínimo relativo es* $M(\ln 2, 4)$. (*Observa en la gráfica que es un mínimo absoluto*)

Para esbozar el recinto tenemos en cuenta además donde corta la gráfica de f al eje X:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = -4e^{-x} = \frac{-4}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} = -4 \ \ (\text{imposible})\ \ (\text{no corta al eje X})$$

Sirve de ayuda conocer los límites en el infinito:

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} (e^x + 4e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} (e^x + \frac{4}{e^x}) = \infty + \frac{4}{\infty} = \infty + 0 = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} (e^x + 4e^{-x}) = 0 + \infty = \infty \end{cases}$$



$$A = \int_0^2 (e^x + 4e^{-x})\, dx = (e^x - 4e^{-x})\Big]_0^2 = (e^2 - 4e^{-2}) - (e^0 - 4e^0) =$$

$$= e^2 - \frac{4}{e^2} - 1 + 4 = \boxed{\left(e^2 - \frac{4}{e^2} + 3\right)\ u^2}$$

Ejercicio 39 Sean f, g: R → R las funciones definidas por f(x) = sen(x) y g(x) = cos(x), respectivamente.
(a) Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo [0, π/2].
(b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas x = 0 y x = π/2.

a) y b) Para esbozar las gráficas tenemos en cuenta:

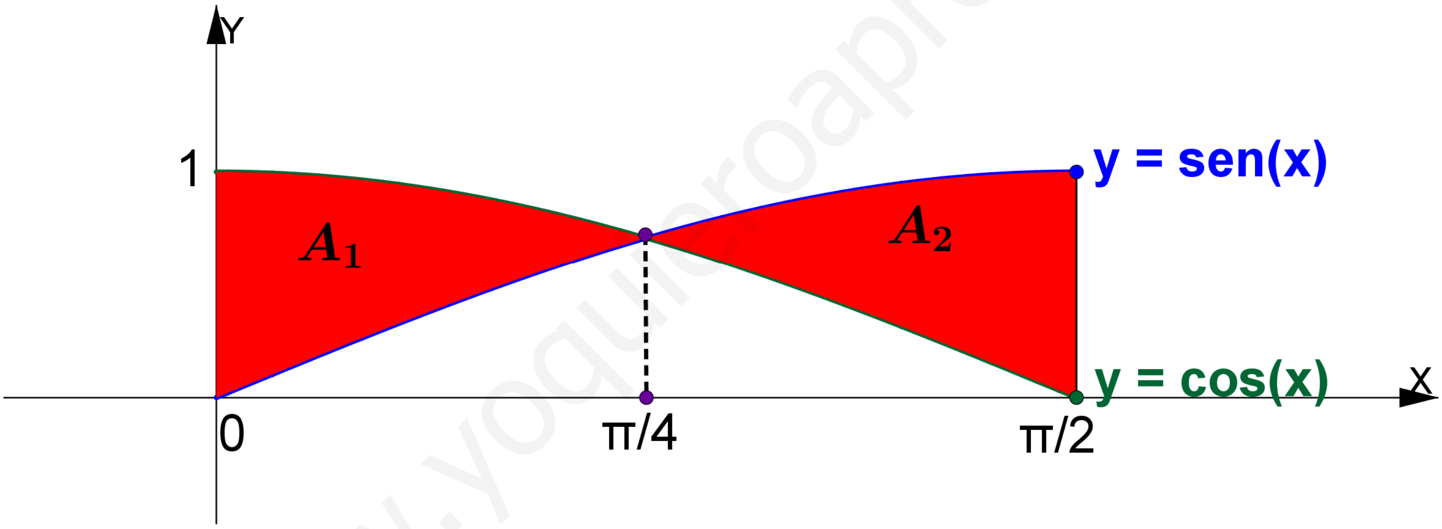
** Los puntos de corte con los ejes:*

$$Eje\ X: \begin{cases} sen(x)=0 \xrightarrow{Como\ 0\le x\le \pi/2\ (x\in I\ cuadrante)} x=0 \Rightarrow f\ corta\ en\ (0,0) \\ \cos(x)=0 \xrightarrow{Como\ 0\le x\le \pi/2\ (x\in I\ cuadrante)} x=\pi/2 \Rightarrow g\ corta\ en\ (\pi/2,0) \end{cases}$$

$$Eje\ Y: \begin{cases} x=0 \to y=f(0)=sen(0)=0 \Rightarrow f\ corta\ en\ (0,0) \\ x=0 \to y=g(0)=\cos(0)=1 \Rightarrow g\ corta\ en\ (0,1) \end{cases}$$

$$*\ Los\ puntos\ de\ corte\ de\ f\ y\ g: \begin{cases} y=sen(x) \\ y=\cos(x) \end{cases} \Rightarrow sen(x)=\cos(x) \xrightarrow{Como\ x\in I\ cuadrante} \begin{cases} x=\pi/4 \\ y=sen\left(\pi/4\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$*\ La\ monotonía\ y\ extremos\ de\ f\ y\ g: \begin{cases} f'(x)=\cos(x)>0\ ,\ pues\ x\in I\ cuadrante \Rightarrow f\ es\ creciente \\ g'(x)=-sen(x)<0\ ,\ pues\ x\in I\ cuadrante \Rightarrow f\ es\ decreciente \end{cases}$$



$$A=A_1+A_2 \to \begin{cases} A_1=\int_0^{\pi/4}\left[\cos(x)-sen(x)\right]dx \\ A_2=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[sen(x)-\cos(x)\right]dx \end{cases}$$

$$A_1=\left[sen(x)+\cos(x)\right]_0^{\pi/4}=\left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]-\left[\overbrace{sen(0)}^{Vale\ 0}+\overbrace{\cos(0)}^{Vale\ 1}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1$$

$$A_2=\left[-\cos(x)-sen(x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\left[-\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{Vale\ 0}-\overbrace{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{Vale\ 1}\right]-\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$$

$$A=A_1+A_2=\boxed{\left(2\sqrt{2}-2\right)\ u^2}$$

$\boxed{\text{Ejercicio 40}}$ Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por f(x) = | x(x – 2) | y g(x) = x + 4.
a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula el punto de corte entre ambas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Podemos obtener la expresión de $f(x)$ como función definida a trozos determinando el signo de $x(x-2)$. Como $x(x-2)=x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2$

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo de x^2-2x	$+$	$-$	$+$
expresión de $f(x)$	x^2-2x	$-(x^2-2x)$	x^2-2x

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & si\ \ x\le 0 \\ -x^2+2x, & si\ \ 0<x<2 \\ x^2-2x, & si\ x\ge 2 \end{cases}$$

a) y b) Para esbozar las gráficas tenemos en cuenta:

* Que la gráfica de $g(x)=x+4$ es una recta

* *Los puntos de corte con los ejes:*

$$Eje\ X:\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \Leftrightarrow \left|x^2-2x\right|=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2 \Rightarrow (0,0)\ y\ (2,0) \\ g(x)=0 \Leftrightarrow x+4=0 \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow (-4,0) \end{array}\right.$$

$$Eje\ Y:\left[\begin{array}{l} x=0 \to y=f(0)=0 \Rightarrow (0,0) \\ x=0 \to y=g(0)=0+4=4 \Rightarrow (0,4) \end{array}\right.$$

$$*\ Los\ puntos\ de\ corte\ de\ f\ \ y\ \ g:\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=x+4 \Rightarrow x=4,\ x=-1 \\ -x^2+2x=x+4 \Rightarrow \nexists\ solución \end{array}\right.$$

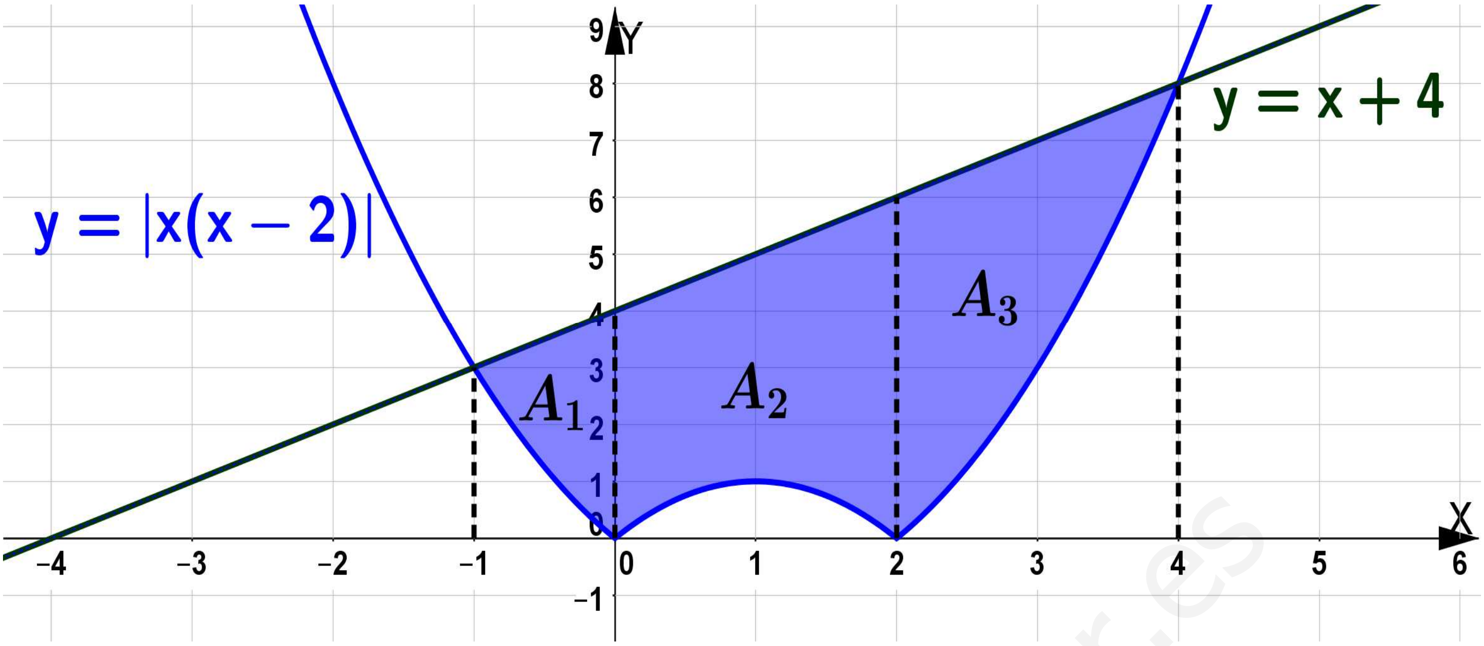
$Si\ x=4,\ \ y=4+4=8\ (punto\ (4,8))$; $Si\ x=-1,\ \ y=-1+4=3\ (punto\ (-1,3))$

$$*\ \ La\ monotonía\ y\ extremos\ de\ f:\ \ f'(x)=\begin{cases} 2x-2, & si\ \ x<0 \\ -2x+2, & si\ \ 0<x<2 \\ 2x-2, & si\ x>2 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ -2x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Monotonía de $f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente

$f(0)=0 \to Mín.\ relativo:(0,0)$; $f(1)=\left|1^2-2.1\right|=1 \to Máx.\ relativo:(1,1);$ $f(2)=0 \to Mín.\ relativo:(2,0)$



$$A = A_1 + A_2 + A_3 \to \left[\begin{array}{l} A_1 = \int_{-1}^{0} \left[(x+4) - (x^2 - 2x) \right] dx = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 3x + 4)\ dx \\ A_2 = \int_{0}^{2} \left[(x+4) - (-x^2 + 2x) \right] dx = \int_{0}^{2} (x^2 - x + 4)\ dx \\ A_3 = \int_{2}^{4} \left[(x+4) - (x^2 - 2x) \right] dx = \int_{2}^{4} (-x^2 + 3x + 4)\ dx \end{array} \right.$$

$$A_1 = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^{0} = (0) - \left[\frac{-(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} + 4(-1) \right] = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{13}{6}$$

$$A_2 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{0}^{2} = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 4.2 \right] - (0) = \frac{8}{3} - 2 + 8 = \frac{26}{3}$$

$$A_3 = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{2}^{4} = \left[\frac{-4^3}{3} + \frac{3.4^2}{2} + 4.4 \right] - \left[\frac{-2^3}{3} + \frac{3.2^2}{2} + 4.2 \right] =$$

$$= \frac{-64}{3} + 24 + 16 + \frac{8}{3} - 6 - 8 = \frac{22}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \boxed{\frac{109}{6}\ u^2}$$

Ejercicio 41 Sean f y g las funciones definidas por f(x) = 2 − x y $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$ para x ≠ −1.

a) Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.
b) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.
c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

$$a)\ \begin{cases} y=2-x \\ y=\dfrac{2}{x+1}\end{cases} \Leftrightarrow 2-x=\frac{2}{x+1} \Leftrightarrow (2-x)(x+1)=2 \Leftrightarrow -x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\to y=2 \Rightarrow (0,2) \\ x=1\to y=1\Rightarrow (1,1)\end{array}\right.$$

b) y c) Para esbozar las gráficas tenemos en cuenta:

* *Los puntos de corte con los ejes:*

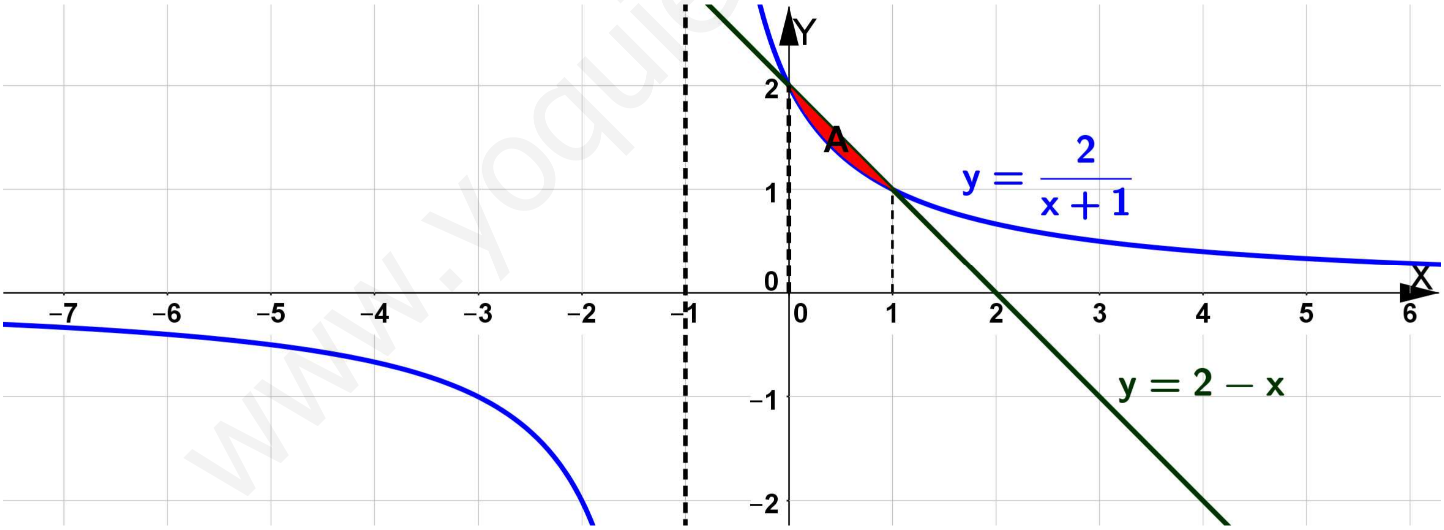
$$Eje\ X:\ \left[\begin{array}{l} 2-x=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f\ corta\ en\ (2,0) \\ \dfrac{2}{x+1}=0\Rightarrow 2=0\ \ (imposible)\end{array}\right.$$

$$Eje\ Y:\ \left[\begin{array}{l} x=0\to y=f(0)=2\Rightarrow f\ corta\ en\ (0,2) \\ x=0\to y=g(0)=2\Rightarrow g\ corta\ en\ (0,2)\end{array}\right.$$

* *La gráfica de f es una recta*

* *La monotonía y extremos de g: Como* $g'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}<0$, *g es decreciente*

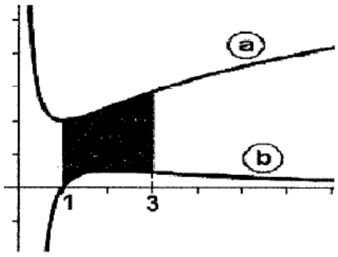
$$*\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0^+}=\infty\end{cases} ;\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x+1}=0$$



$$A=\int_0^1\left[(2-x)-\frac{2}{x+1}\right]dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x+1|\right)\Big]_0^1=$$

$$=(2.1-\frac{1^2}{2}-2\ln|1+1|)-(2.0-\frac{0^2}{2}-2\overbrace{\ln|0+1|}^{Vale\,0})=2-\frac{1}{2}-2\ln 2=\boxed{\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)\ u^2}$$

Ejercicio 42 Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función f: (0, ∞) → R definida por $f(x)=\frac{2}{x}+2\ln(x)$ y a la de su derivada f´: (0, ∞) → R



a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f´.

$\boxed{a}$ *es decreciente en el intervalo* $(0,1)$ *y creciente en* $(1,\infty)$, luego su derivada debe ser negativa *en el intervalo* $(0,1)$ *y positiva en* $(1,\infty)$.

Observamos que b tiene las características de *la derivada de* $\boxed{a}$.

Por tanto, $\boxed{a} \leftrightarrow f \;\; y \;\; \boxed{b} \leftrightarrow f'$

b) Calcula el área de la región sombreada.

$$A=\int_1^3[f(x)-f'(x)]dx=\int_1^3\left[\frac{2}{x}+2\ln(x)-\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x}\right)\right]dx=2\int_1^3\left(\ln(x)+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$\int\left(\ln(x)+\frac{1}{x^2}\right)dx=\overbrace{\int \ln x\,dx}^{Vale\; x\ln x-x}+\int\frac{1}{x^2}dx=x\ln x-x+\frac{-1}{x}$$

$$A=2\left[\left(x\ln x-x+\frac{-1}{x}\right)\right]_1^3=2\left\{\left(3\ln 3-3+\frac{-1}{3}\right)-\left(1\overbrace{\ln 1}^{Vale\;0}-1+\frac{-1}{1}\right)\right\}=$$

$$=2\left(3\ln 3-\frac{10}{3}+2\right)=\boxed{\left(6\ln 3-\frac{8}{3}\right)u^2}$$

$\boxed{\text{Ejercicio 43}}$ El área del recinto limitado por las curvas $y=\dfrac{x^2}{a}$ e $y=\sqrt{ax}$, con a > 0, vale 3. Calcula el valor de a.

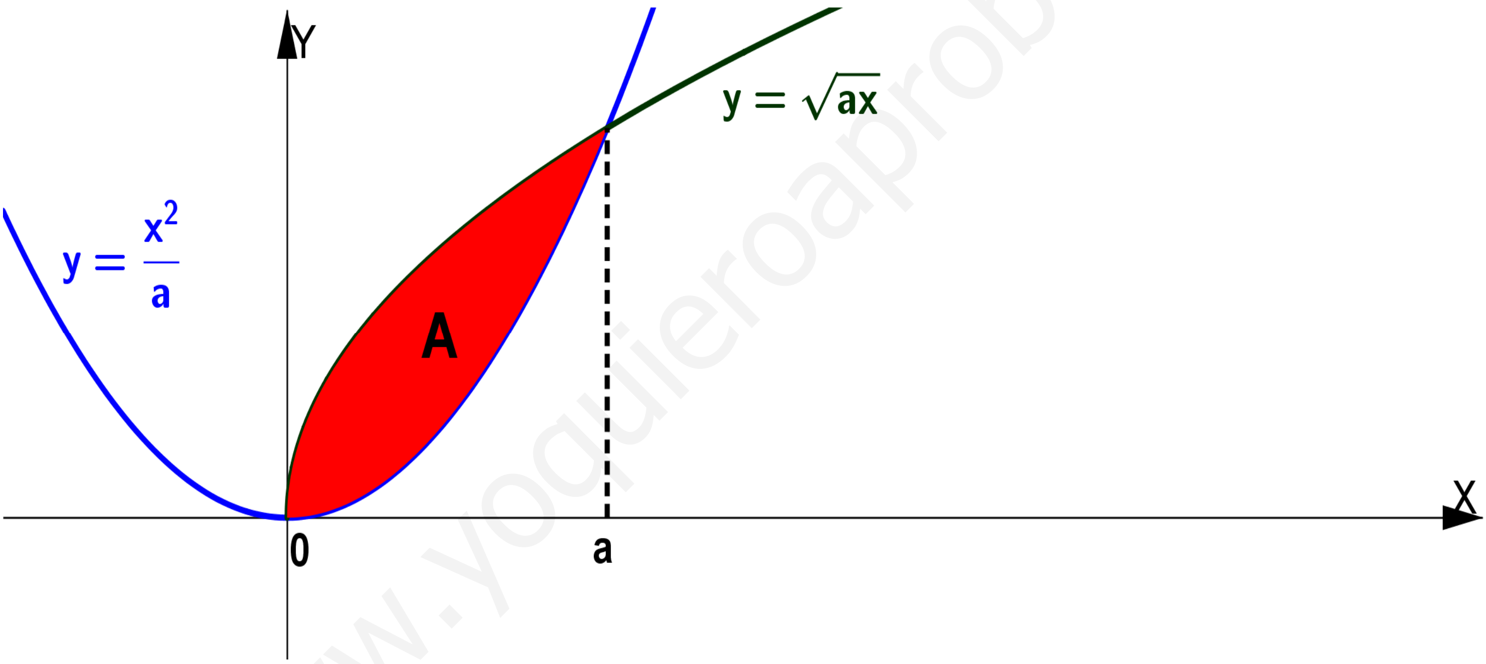
Para esbozar el recinto tenemos en cuenta:

* $y=\dfrac{x^2}{a}$ es una parábola *con las ramas hacía arriba y de vértice* $(0,0)$

* $y=\sqrt{ax}$ es creciente y corta a los ejes en $(0,0)$:

* *Los puntos donde se cortan las curvas:* $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{a} \\ y=\sqrt{ax} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a}=\sqrt{ax} \xrightarrow{\text{Elevando al cuadrado}} \dfrac{x^4}{a^2}=ax$

$$x^4=a^3x \Leftrightarrow x^4-a^3x=0 \Leftrightarrow x(x^3-a^3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\ ;\ y=\sqrt{a.0}\rightarrow y=0\ ;\ (0,0) \\ x=\sqrt[3]{a^3}=a\ ;\ y=\sqrt{a.a}\rightarrow y=a\ ;\ (a,a) \end{cases}$$



$$A=\int_0^a\left[\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right]dx=\left(\sqrt{a}\,\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{1}{a}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^a=\left(\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg]_0^a=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{a.a^3}}{3}-\frac{a^3}{3a}\right)-(0)=\frac{2a^2}{3}-\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{3}$$

$$\textit{Como }A=3,\ \frac{a^2}{3}=3\Rightarrow a^2=9\xrightarrow{\textit{Como } a>0}\boxed{a=3}$$

Ejercicio 44 Calcula □ > 0 para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f: ℜ → ℜ y g: ℜ → ℜ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2□^2$ sea 72 (unidades de área).

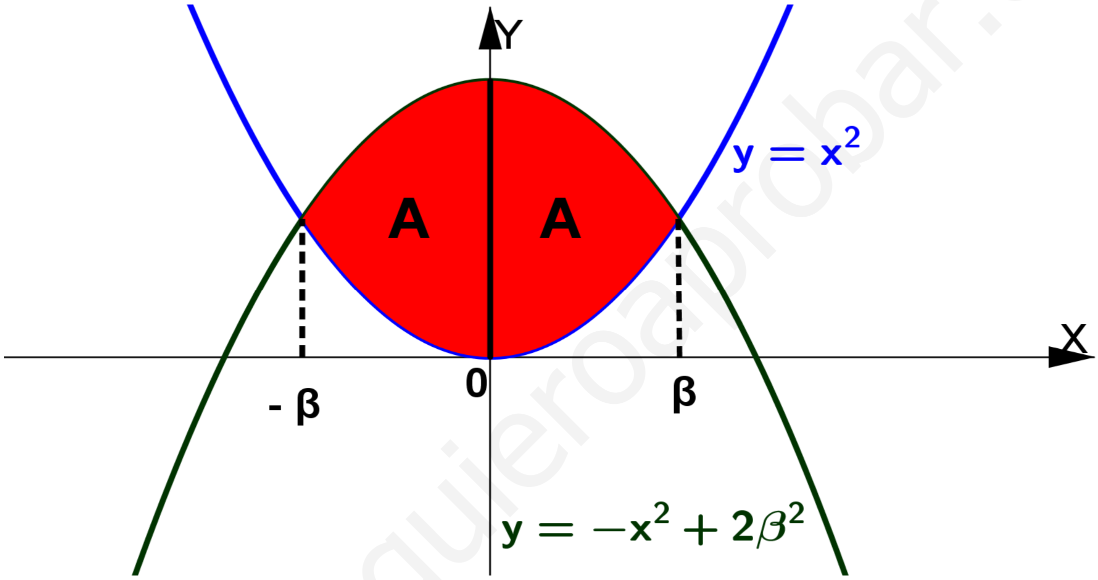
Para esbozar el recinto tenemos en cuenta:

* $f(x) = x^2$ es una parábola *con las ramas hacía arriba y de vértice* $(0,0)$

* $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ es una parábola *con las ramas hacía abajo y de vértice* $(0, 2\beta^2)$

* *Los puntos donde se cortan las curvas*: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2\beta^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 2\beta^2$

$$2x^2 = 2\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \beta \\ ó \\ x = -\beta \end{cases} ; \; y = \beta^2 \quad \textit{Puntos } (\beta, \beta^2) \text{ y } (-\beta, \beta^2)$$



Como el recinto es simétrico respecto del eje Y, el área que se pide es 2A

$$A = \int_0^\beta \left[\left(-x^2 + 2\beta^2 \right) - x^2 \right] dx = \int_0^\beta (-2x^2 + 2\beta^2)\, dx =$$

$$= \left(\frac{-2x^3}{3} + 2\beta^2 x \right) \Big]_0^\beta = \left(\frac{-2\beta^3}{3} + 2\beta^2 \beta \right) - (0) = \frac{4\beta^3}{3}$$

$$\textit{Como } 2A = 72 \Rightarrow 2\frac{4\beta^3}{3} = 72 \Rightarrow \beta^3 = 27 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}$$