

Problema 1 Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1}$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x - 3}}$$

Solución:

$$1. f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} \implies \text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup (1, \infty)$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x - 3}} \implies \text{Dom } f = (3, \infty)$$

Problema 2 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, calcular:
 $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} - 1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \frac{5x+1}{2x-1}$, calcular la función inversa.

Solución:

$$y = \frac{5x+1}{2x-1} \implies 2yx - y = 5x + 1 \implies 2yx - 5x = y + 1 \implies$$

$$(2y - 5)x = y + 1 \implies x = \frac{y+1}{2y-5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x-5}$$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 5x - 2}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{2 - \sqrt{x^2 - 12}}$$

Solución:

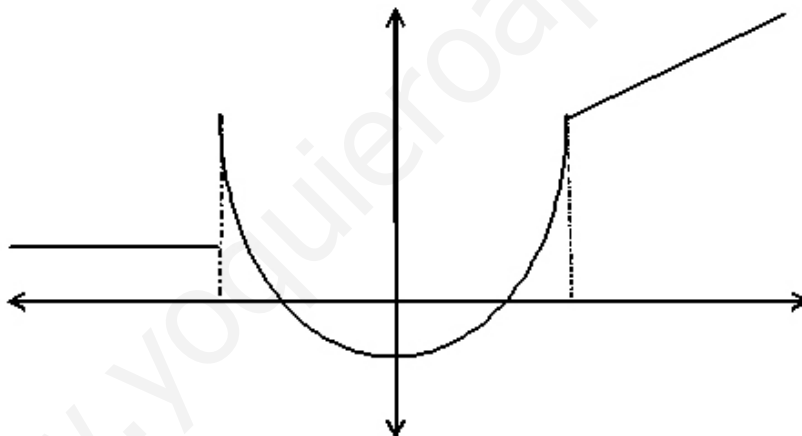
$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 5x - 2}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 4} = -\frac{3}{4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{2 - \sqrt{x^2 - 12}} = -\frac{1}{2}$$

Problema 5 Dibujar la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{1\}$
2. Si hacemos $x = 0 \implies (0, 4)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \implies (2, 0)$ y $(-2, 0)$
- 3.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x - 1)} = -\frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

La función ni es par ni impar.

4.
 - **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \left[\frac{-3}{0^-} \right] = \infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \infty \implies \text{No Hay}$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 1} - x \right) = 1$$
$$y = x + 1$$

