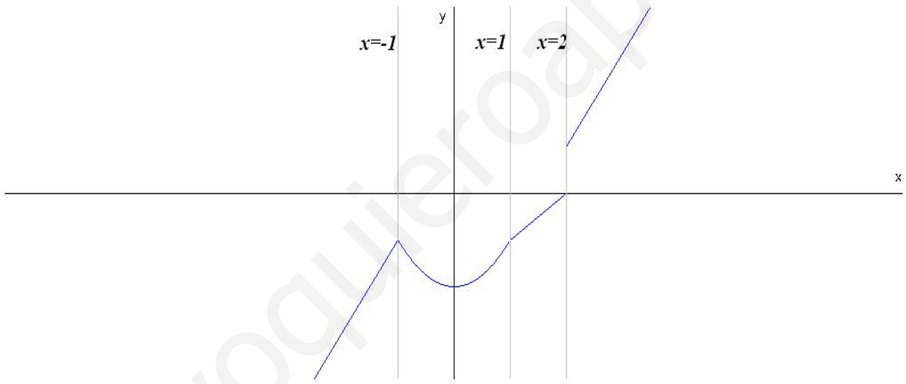
Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 5 & \text{si} \quad x=1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

en los puntos $x=-1$, $x=1$ y en $x=2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x=-1$ es continua , en $x=1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x=2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2ax^2-bx+1 & \text{si} \quad x<1 \\ bx^2-ax+2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x=1$.

Solución:

Continuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(2ax^2-bx+1)=2a-b+1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 2) = b - a + 2$$

$$2a - b + 1 = b - a + 2 \Longrightarrow 3a - 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \;\; f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 4a - b = 2b - a \Longrightarrow 5a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 5a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2ax-b}{3} & \text{si} \quad x < -1 \\ 3bx - 2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \frac{4ax-2b}{2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{2ax - b}{3} = \dfrac{-2a - b}{3} \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} (3bx - 2) = -3b - 2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-2a - b}{3} = -3b - 2 \Longrightarrow a - 4b = 3$$

Continuidad en $x = 1$:

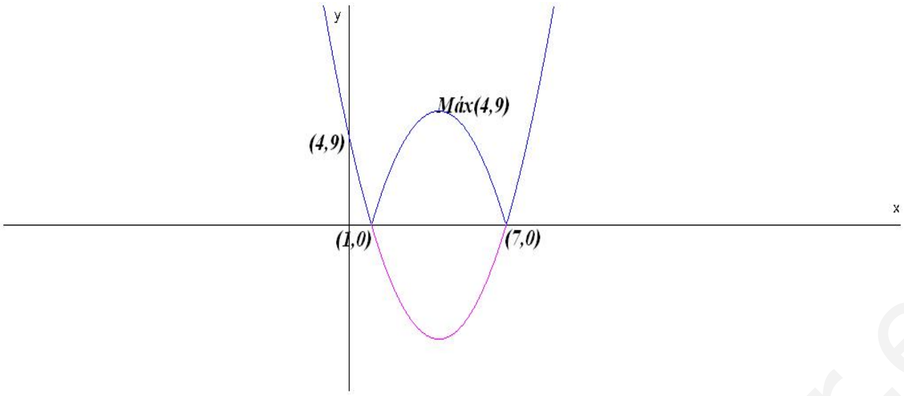
$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (3bx - 2) = 3b - 2 \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{4ax - 2b}{2} = 2a - b \end{cases} \Longrightarrow 3b - 2 = 2a - b \Longrightarrow a - 2b = -1$$

$$\begin{cases} a - 4b = 3 \\ a - 2b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 8x + 7 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4$:

x	y
0	7
1	0
7	0
4	-9



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(4) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(4, -9)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(4, 9)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -(x^2 - 8x + 7) & \text{si} \quad 1 < x \le 7 \\ x^2 - 8x + 7 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 8x + 7) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 8x - 7) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 8x - 7) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 8x + 7) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x + 8 & \text{si} \quad 1 < x \le 7 \\ 2x - 8 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -6$ y $f'(1^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -6$ y $f'(7^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{1, 7\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = 2ax^2 - 3bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 3)$.

Solución:

$$f(x) = 2ax^2 - 3bx + c, \quad f'(x) = 4ax - 3b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = 3 \Longrightarrow 8a - 6b + c = 3 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 8a - 3b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/4 \\ b = -2/3 \\ c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$