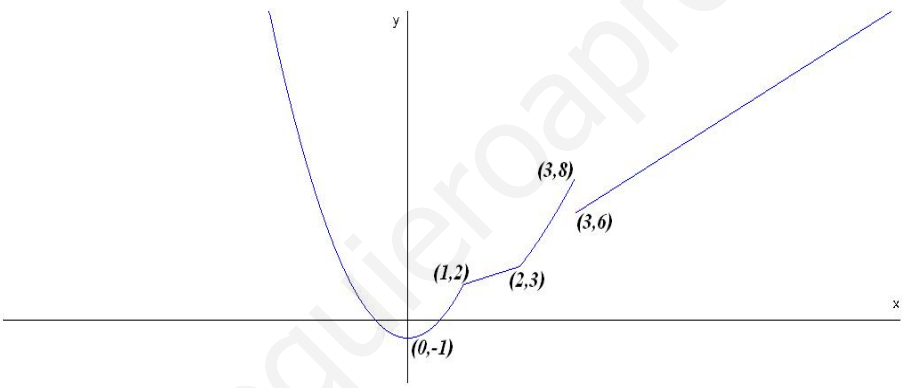
Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ 2x & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y en $x = 3$. Representarla gráficamente
Solución:



En $x = 1$ es continua , en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 3$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 3ax + 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 + 3bx + 1) = a + 3b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - 3ax + 2) = b - 3a + 2$$

$$a + 3b + 1 = b - 3a + 2 \Longrightarrow 4a + 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 3a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a + 3b; \;\; f'(1^+) = 2b - 3a \Longrightarrow 2a + 3b = 2b - 3a \Longrightarrow 5a + b = 0$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 5a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1/6 \\ b = 5/6 \end{cases}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

Solución:

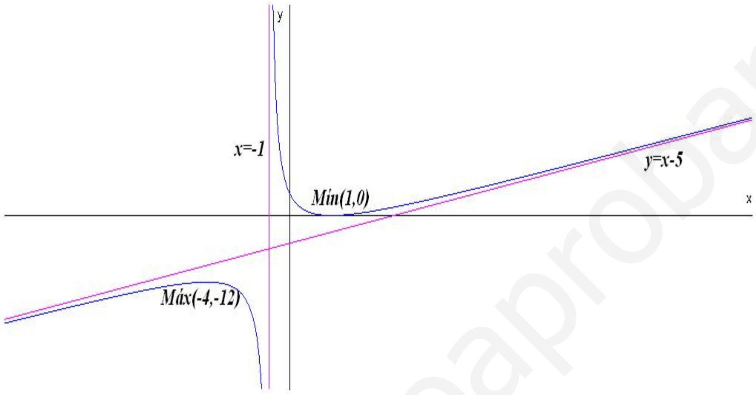
1. Asíntotas:
   - Verticales: en $x = -1$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{(x-2)^2}{x+1} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{(x-2)^2}{x+1} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$
   - Horizontales: No hay
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x+1} = \infty$$
   - Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x - 5$
   $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x^2 + x} = 1$$
   $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x+1} - x\right) = -5$$
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; x = -4$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

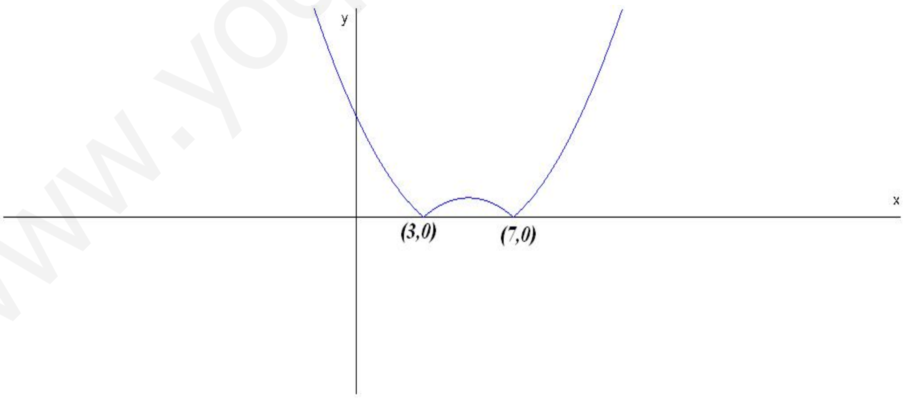
La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-4)\cup(2,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-4,-1)\cup(-1,4)$

La función tiene un máximo en el punto $(-4,-12)$ y un mínimo en el punto $(2,0)$.



Problema 4 Estudiar la continuidad de la función $f(x)=|x^2-10x+21|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x)=x^2-10x+21\Longrightarrow g'(x)=2x-10=0\Longrightarrow x=5$:



x	y
0	21
3	0
7	0
5	-4

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(5) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(5, -4)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(5, 4)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - 10x + 21 & \text{si} & x \le 3 \\ -(x^2 - 10x + 21) & \text{si} & 3 < x \le 7 \\ x^2 - 10x + 21 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 10x + 21) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (-x^2 + 10x - 21) = 0$$

$$f(3) = 0$$

Y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 10x - 21) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 10x + 21) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 10 & \text{si} & x \le 3 \\ -2x + 10 & \text{si} & 3 < x \le 7 \\ 2x - 10 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -4$ y $f'(3^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 3$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -4$ y $f'(7^+) = 4$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{3, 7\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = 3ax^2 - bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 3)$.

Solución:

$$f(x) = 3ax^2 - bx + c, \quad f'(x) = 6ax - b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = 3 \Longrightarrow 12a - 2b + c = 3 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a - b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1/6 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - 2x - 1$$