

**Problema 1** Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

**Solución:**

- Dominio de  $f$ :  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
- Puntos de Corte
  - Corte con el eje  $OX$  hacemos  $f(x) = 0 \implies x^2 + 5 = 0 \implies$  No hay puntos de corte con  $OX$ .
  - Corte con el eje  $OY$  hacemos  $x = 0 \implies f(0) = -5 \implies (0, -5)$ .
- 

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	+	-	+

- $f(-x) = f(x) \implies$  función PAR.
- Asíntotas:

- **Verticales:**  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \left[ \frac{6}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \left[ \frac{6}{0^-} \right] = -\infty$$

$$x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \left[ \frac{6}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \left[ \frac{6}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:**  $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ .

La función es decreciente en el intervalo  $(0, 1) \cup (1, \infty)$ .

La función tiene un máximo en el punto  $(0, -5)$

g)

$$f''(x) = \frac{12(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} \neq 0$$

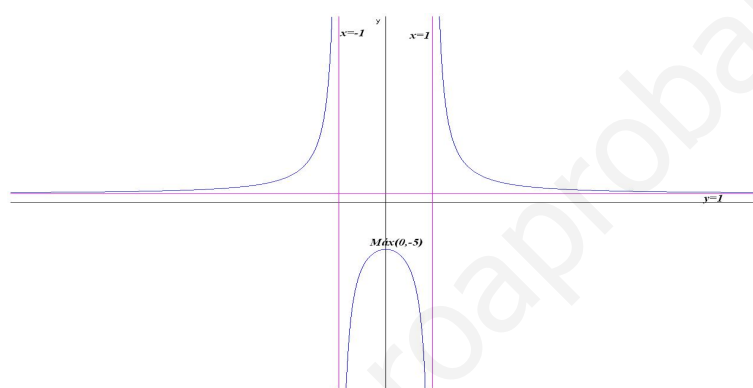
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Convexa:  $(-1, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ :

Como  $m = f'(2) = -\frac{8}{3}$  tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - 3 = -\frac{8}{3}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - 3 = \frac{3}{8}(x - 2)$$

Como  $f(2) = 3$  las rectas pasan por el punto  $(2, 3)$ .

