

**Problema 1** Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 12}{x - 2}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

**Solución:**

- a) Dominio de  $f$ :  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- b) Puntos de Corte
  - Corte con el eje  $OX$  hacemos  $f(x) = 0 \implies x^2 + 12 = 0 \implies$  No hay puntos de corte con  $OX$ .
  - Corte con el eje  $OY$  hacemos  $x = 0 \implies f(0) = -6 \implies (0, -6)$ .
- c)

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	-	+

- d)  $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$  la función no tiene simetrías.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:**  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 12}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 12}{x - 2} = \left[ \frac{16}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 12}{x - 2} = \left[ \frac{16}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 12}{x - 2} = \infty$$

- **Oblicuas:**  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 12}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 12}{x - 2} - x \right) = 2$$

Luego la asíntota oblicua es  $y = x + 2$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{(x - 2)^2} = 0 \implies x = -2, x = 6$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 6)$	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo  $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$ .

La función es decreciente en el intervalo  $(-2, 2) \cup (2, 6)$ .

La función tiene un máximo en el punto  $(-2, -4)$  y un mínimo en  $(6, 12)$ .

g)

$$f''(x) = \frac{32}{(x - 2)^3} \neq 0$$

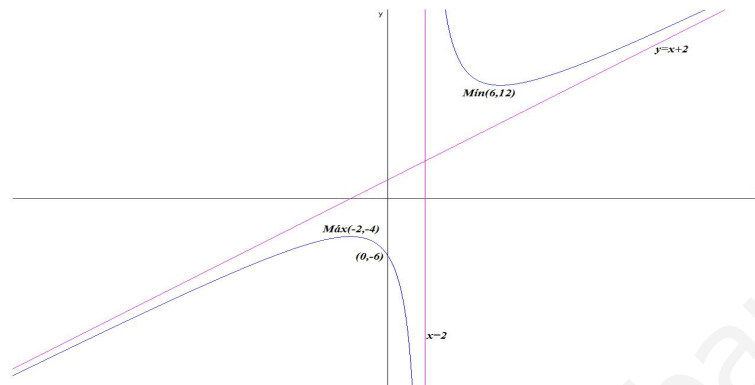
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

Cóncava:  $(2, +\infty)$

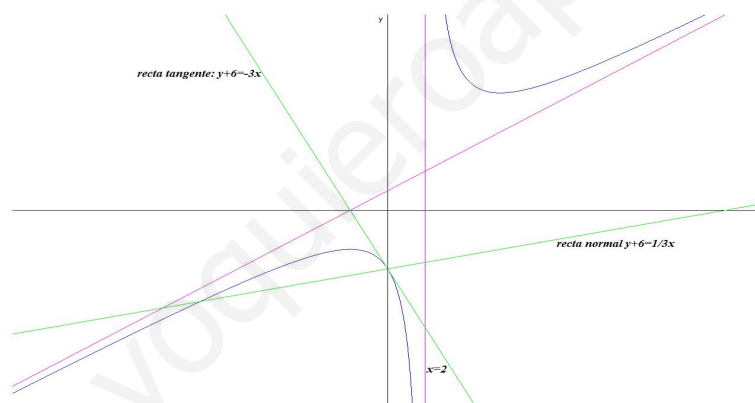
Convexa:  $(-\infty, 2)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ :

Como  $m = f'(0) = -3$  tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y + 6 = -3x$$

$$\text{Recta Normal : } y + 6 = \frac{1}{3}x$$

Como  $f(0) = -6$  las rectas pasan por el punto  $(0, -6)$ .