Prueba escrita de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.
1º Bachillerato

3 de diciembre de 2015. Unidades 3 y 4.

Prueba resuelta

1. ***a*) Calcule k para que el polinomio $p(x) = x^4 - kx^3 + 2x - 1$ sea divisible por $x - 1$.**

***b*) Opere y simplifique:** $\left(\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{x}{x^2-x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}\right)$

Resolución:

a) De acuerdo al Teorema del Resto, para que $p(x)$ sea divisible entre $x-1$, el resto de la división de $p(x)$ entre $x-1$ debe ser 0 y, por tanto, el valor numérico $p(1)$ de $p(x)$ para $x=1$ debe ser igual a 0.

Por tanto:

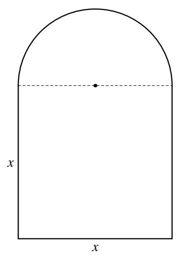
$$\begin{aligned} p(1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1^4 - k\cdot 1^3 + 2\cdot 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - k + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -k + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad k = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, el valor solicitado es $k = 2$.

b)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-x}\right) : \left(\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x(x-1)}\right) : \left(\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}\right) : \left(\frac{x+1+x-1}{(x-1)^2}\right) = \\ &= \left(\frac{1-(x+1)}{(x-1)(x+1)}\right) : \left(\frac{2x}{(x-1)^2}\right) = \\ &= \left(\frac{-x}{(x-1)(x+1)}\right) \cdot \left(\frac{(x-1)^2}{2x}\right) = \\ &= \frac{-x(x-1)^2}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{-1(x-1)}{2(x+1)} = \frac{1-x}{2x+2} \end{aligned}$$

2. Se quiere vallar un campo que tiene la forma de la figura. Calcule en función de x el perímetro que hay que vallar. ¿Cuántos metros de valla metálica hay que poner si el lateral mide 25 metros?



Resolución:

La figura tiene tres lados rectos de longitud igual a x metros cada uno y la parte curvada es una semicircunferencia de radio $\dfrac{x}{2}$. Por tanto, el perímetro viene dado por

$$P(x) = 3x + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = 3x + \frac{\pi x}{2}$$

Para el caso de $x = 25$ metros, la cantidad de valla metálica necesaria será

$$P(25) = 3 \cdot 25 + \frac{25\pi}{2} = 75 + \frac{25\pi}{2} \text{ metros}$$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

***a*) $(x-2)^2 + x = 2(2-(1-x)^2)$**

***b*) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x = 6$**

***c*) $\dfrac{-1}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3}{x^2-1}$**

***d*) $\sqrt{2x} - \sqrt{1+x} = 1$**

Resolución:

a)

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + x = 2(2-(1-x)^2) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + x = 2(2-(1-2x+x^2)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 4 = 2(1+2x-x^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 4 = 2 + 4x - 2x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 7x + 2 = 0\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de las soluciones de la ecuación de segundo grado, obtenemos que las soluciones son

$$\left\{x = \frac{1}{3}, x = 2\right\}$$

b)

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

Factorizando el miembro de la izquierda de la igualdad, obtenemos

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

Por tanto las soluciones son

$$\{x = -1, x = 1, x = 2, x = 3\}$$

c) En esta ecuación, en primer lugar factorizamos los denominadores:

$$\frac{-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(x+1)}$$

Como los denominadores se anulan si $x = 1$ o $x = -1$ entonces descartamos que x pueda tomar esos valores y multiplicados ambos miembros de la igualdad por $(x-1)(x+1)$ que, en tal caso, es distinto de cero:

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{-1 \cdot (x-1)(x+1)}{x+1} - \frac{2 \cdot (x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{3 \cdot (x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &(-1)(x-1) - 2(x+1) = 3 \\ \Leftrightarrow \quad &-x + 1 - 2x - 2 = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &-3x - 1 = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &-3x = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &x = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Como el valor obtenido es distinto de -1 y 1, entonces es una solución válida para la ecuación, y por tanto su solución es el valor $x = -\dfrac{4}{3}$.

d) Esta ecuación la resolvemos elevando al cuadrado los dos miembros.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2x} - \sqrt{1+x} = 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & \left(\sqrt{2x} - \sqrt{1+x}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & (\sqrt{2x})^2 - 2 \cdot \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1+x} + (\sqrt{1+x})^2 = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 2x - 2\sqrt{2x(1+x)} + 1 + x = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 3x + 1 - 2\sqrt{2x(1+x)} = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & -2\sqrt{2x(1+x)} = -3x \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{2x(1+x)} = 3x \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & (2\sqrt{2x(1+x)})^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 4 \cdot 2x(1+x) = 9x^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 8x + 8x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x(x-8) = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ x = 8 \end{cases}
\end{aligned}$$

Como hemos elevado al cuadrado los dos miembros en dos de los pasos, debemos comprobar las soluciones:

- $x = 0$. En este caso el primer miembro es $\sqrt{0} - \sqrt{1} = -1$, por lo que la ecuación no se verifica y, por tanto, $x = 0$ no es solución.
- $x = 8$. En este caso $\sqrt{2x} - \sqrt{1+x} = \sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$, por lo que la igualdad se verifica y entonces $x = 8$ es solución de la ecuación.

Luego la única solución de la ecuación es $x = 8$.

4. ***a*) Dada la ecuación $3x^2 - 6x + k = 0$, determine el valor de k para que dicha ecuación tenga una solución única.**

***b*) Halle un polinomio de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea $\frac{10}{3}$ y el producto sea $-\frac{25}{3}$.**

Resolución:

a) Para que tenga solución única debe ser cero el discriminante de la fórmula de soluciones de la ecuación de segundo grado.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Leftrightarrow 36 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0 \Leftrightarrow 36 - 12k = 0 \Leftrightarrow 12k = 36 \Leftrightarrow k = 3$$

Por tanto, para que tenga solución única el valor de k debe ser $k = 3$ y la ecuación queda $3x^2 - 6x + 3 = 0$ cuya única solución es $x = 1$.

b) Por las relaciones de Cardano-Vieta, sabemos que, en una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c = 0$, las soluciones suman $-\dfrac{b}{a}$ y su producto es $\dfrac{c}{a}$.

Como nos indican que las soluciones suman $\frac{10}{3}$ y su producto es $-\frac{25}{3}$, comparando con lo anterior, tenemos que

$$-\frac{b}{a} = \frac{10}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{a} = -\frac{25}{3}$$

Por tanto, podemos hacer $a = 3$ (ya que el denominador coincide), y entonces puede ser $b = -10$ y $c = -25$. Entonces la ecuación de segundo grado podría ser:

$$3x^2 - 10x - 25 = 0$$

cuyas soluciones son $x = \dfrac{5}{3}$ y $x = -5$, que efectivamente cumplen las condiciones del ejercicio.

5. **Un determinado detergente se distribuye en tres tipos de envases, A, B y C. Los envases de tipo A contienen 1200 gramos y se venden a un precio de 10 euros. Los envases de tipo B contiene 1 kilogramo y cuestan 8,5 euros cada uno. Los del tipo C contienen 750 gramos y cuestan 7 euros la unidad. Una lavandería ha pagado 154 euros por 19 envases que contienen un total de 17,5 kilos de detergente. Calcule el número de envases que se han comprado de cada tipo.**

Resolución:

Vamos a usar las siguientes incógnitas:

- $a =$ número de envases de tipo A
- $b =$ número de envases de tipo B
- $c =$ número de envases de tipo C

Del hecho de que la lavandería ha comprado 19 envases se deduce que

$$a + b + c = 19$$

Como ha pagado 154 euros, teniendo en cuenta el precio de cada tipo de envase, tenemos que:

$$10a + 8{,}5b + 7c = 154$$

Como en total hay 17,5 kilos de detergente, teniendo en cuenta lo que pesa medido en kilos cada tipo de envase, obtenemos la ecuación:

$$1{,}2a + b + 0{,}75c = 17{,}5$$

Luego, hemos obtenido el siguiente sistema de ecuaciones que procederemos a resolverlo por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 19 \\ 10a & + & 8{,}5b & + & 7c & = & 154 \\ 1{,}2a & + & b & + & 0{,}75c & = & 17{,}5 \end{array}\right. \xrightarrow[E_3 \to 1{,}2E_1 - E_3]{E_2 \to 10E_1 - E_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 19 \\ & & 1{,}5b & + & 3c & = & 36 \\ & & 0{,}2b & + & 0{,}45c & = & 5{,}3 \end{array}\right. \to$$

$$\xrightarrow[E_3 \to 20E_3]{E_2 \to \frac{2}{3}E_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 19 \\ & & b & + & 2c & = & 24 \\ & & 4b & + & 9c & = & 106 \end{array}\right. \xrightarrow[E_3 \to -4E_1 + E_3]{} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 19 \\ & & b & + & 2c & = & 24 \\ & & & & c & = & 10 \end{array}\right.$$

De la tercera ecuación obtenemos $c = 10$. Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos $b + 20 = 24 \Rightarrow b = 4$. Y, finalmente, sustituyendo b y c por sus valores en la primera ecuación, obtenemos $a + 4 + 10 = 19 \Rightarrow a = 5$.

Luego, la lavandería compró 5 envases de tipo A, 4 envases de tipo B y 10 envases de tipo C.

6. **El mercado de cierto producto presenta las siguientes funciones de oferta y demanda en función del precio p al que se vende el producto:**

$$O(p) = 3(10 - p)^2 - 273, \qquad D(p) = 6(15 - 8p)$$

Calcule el punto de equilibrio del mercado.

Resolución:

El punto de equilibro será aquel en el que p sea un valor positivo de modo que coincidan la oferta y la demanda, es decir

$$O(p) = D(p)$$

Por tanto, debemos hallar p tal que $3(10-p)^2 - 273 = 6(15-8p)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
3(10-p)^2 - 273 = 6(15-8p) &\Leftrightarrow 3(100-20p+p^2) - 273 = 90 - 48p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 300 - 60p + 3p^2 - 273 = 90 - 48p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3p^2 - 12p - 63 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow p^2 - 4p - 21 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow p = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot(-21)}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \text{o} \\ x = 7 \end{cases}
\end{aligned}$$

Como p debe tomar un valor positivo por ser el valor de un precio, entonces $p = 7$ unidades monetarias.

Sin embargo, para dicho valor de p, tanto la oferta como la demanda alcanzan un valor igual a -246, que no es válido puesto que no pueden tomar un valor negativo.

Por tanto, la conclusión es que no hay punto de equilibrio.