

# RADICALES

**Definición:** Definimos raíz n-ésima de a de la siguiente forma:  $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

En la definición anterior a la expresión  $\sqrt[n]{a}$  se le llama radical, a n se llama índice, a  $\sqrt{\quad}$  signo radical y a "a" radicando.

**Definición**(Potencias de exponente fraccionario): Una potencia de exponente fraccionario es igual al un radical donde: el denominador de la fracción es el índice del radical, y el numerador es el exponente del radicando.

$$\text{Por lo tanto: } a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

## **Propiedades de los radicales**

$$1^{\text{a}}.- \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$2^{\text{a}}.- \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

$$3^{\text{a}}.- \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4^{\text{a}}.- \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$5^{\text{a}}.- \sqrt[n]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}^p$$

## **Operaciones con radicales:**

**Definición:** Dos radicales son *semejantes* o *equivalentes* si tienen las mismas raíces.

**SUMA y RESTA:** Para sumar o restar raíces tendremos que comprobar que el radicando y el índice de la raíz con las que queremos operar son exactamente iguales (son semejantes o equivalentes); de no ser así, no podremos sumarlas. Una vez comprobado esto sumaremos o restaremos los números que acompañan a la raíz:

$$\text{Ejemplo: a) } \sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{4} \text{ no se pueden sumar.}$$

## **MULTIPLICACIÓN:**

A) Si los índices de las raíces son iguales, multiplicaremos los radicandos.

B) Si los índices son distintos, habrá que hallar el índice común para dividirlo por el índice de cada raíz y el resultado habrá que aplicarlo como exponente de los radicandos.

$$\text{Ejemplo: a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12}$$

$$\text{b) } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{72}$$

## **DIVISIÓN (Racionalización):**

A) Si el denominador es un única raíz, tendremos que multiplicar al numerador y al denominador por una raíz que consiga eliminar la raíz del denominador.

B) Si el denominador es la suma / resta de una raíz con un número real o con otra raíz, se tendrá que multiplicar por su conjugado.

$$\text{Ejemplo: a) } \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

$$\text{b) } \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})} = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

1.- Realizar las siguientes operaciones simplificando al máximo:

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{7}}$

b)  $\left(\frac{4}{6}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{4}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$

c)  $\{a^{-1/2} \cdot b^{-1/3}\}^{-3} \cdot \{a^{1/2} b^{1/2}\}^{-1}$

d)  $\frac{\frac{a^{1/2} a^{1/3}}{1 : a^{1/4}}}{\frac{a^{1/3} a^{1/2}}{a^{1/2} : a^{1/3}}} : \frac{\frac{a a^{1/2}}{a^{1/4} a^{1/2}}}{\frac{a^{1/3} a^{1/2}}{a^{1/2} : a^{1/3}}}$

Sol: a)  $2^{-13/28}$ ; b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1/6} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/6}$ ; c)  $a\sqrt{b}$ ; d)  $a^{-1} = \frac{1}{a}$

2.- Expresa las siguientes potencias en forma de raíz y calcula la raíz (si se puede)

a)  $121^{\frac{1}{2}}$

b)  $(-27)^{\frac{1}{3}}$

c)  $(0,125)^{-\frac{1}{3}}$

d)  $\left(\frac{144}{169}\right)^{\frac{1}{2}}$

e)  $81^{\frac{3}{4}}$

f)  $32^{0,4}$

g)  $0,25^{0,5}$

h)  $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$

i)  $a^{\frac{2}{5}}$

j)  $(x+3)^{\frac{3}{4}}$

3.- Escribe las raíces en forma de potencias:

a)  $\sqrt{169}$

b)  $\sqrt[3]{8}$

c)  $\sqrt[3]{0,064}$

d)  $\sqrt[5]{32^3}$

e)  $\sqrt[7]{4}$

f)  $\sqrt[6]{(3x+4)^5}$

g)  $\sqrt[7]{2x^4}$

h)  $\sqrt[n]{b^{x-1}}$

i)  $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$

j)  $\sqrt[m]{a^{x+2}}$

4.- Simplifica los siguientes radicales:

a)  $\sqrt{50}$

b)  $\sqrt{125}$

c)  $\sqrt{98}$

d)  $\sqrt[3]{280}$

e)  $\sqrt{32}$

f)  $\sqrt{72}$

5.- Simplifica las siguientes expresiones:

a)  $\sqrt{200x^3}$

b)  $\sqrt[5]{81x^9y^5}$

c)  $\sqrt[4]{625a^6c^8}$

d)  $\sqrt[3]{8a^6b^3}$

e)  $\sqrt{18a^5b^4c^3}$

6.- Introduce en el radical los factores que están fuera:

a)  $5\sqrt{5}$

b)  $4\sqrt[4]{4}$

c)  $4\sqrt{2}$

d)  $3\sqrt{3}$

e)  $4ab\sqrt{3ab}$

7.- Realiza las siguientes operaciones:

a)  $\sqrt[3]{16} : \sqrt{2}$

b)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4}$

c)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt{3}$

d)  $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[4]{x^3}$

e)  $\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{2}}$

8.- Opera:

a)  $(\sqrt{2})^3$

b)  $(2\sqrt[3]{4})^4$

c)  $(\sqrt[3]{x^2})^6$

d)  $(2\sqrt{3})^4$

e)  $(\sqrt[3]{3})^4$

f)  $((\sqrt{3})^2)^2$

9.- Realiza las siguientes operaciones:

$$a) \sqrt{\sqrt{81}} \quad b) \sqrt[4]{\sqrt{64}} \quad c) \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)^8 \quad d) \left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^4 \quad e) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \quad f) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

10.- Calcula:

$$\begin{array}{lll} a) 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} & b) \sqrt{12} - \sqrt{27} & c) \sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{54} \\ d) 2\sqrt{18} - 3\sqrt{98} & e) 3\sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{3} & f) 2\sqrt{7} - 3\sqrt{28} + \sqrt{63} - 2\sqrt{175} \\ g) 4\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{27} & h) \sqrt{1000} - 3\sqrt{10} + 5\sqrt{100000} \end{array}$$

11.- Racionaliza:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} & b) \frac{1}{\sqrt[3]{2}} & c) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \quad d) \frac{5\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{2}} \\ e) \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} & f) \frac{4}{\sqrt{8}} & g) \frac{3}{\sqrt[4]{3}} \quad h) \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} \end{array}$$

Soluciones:

$$\begin{array}{l} 4.- a) 5\sqrt{2}; b) 5\sqrt{5}; c) 7\sqrt{2}; d) 2\sqrt{35}; e) 4\sqrt{2}; f) 6\sqrt{2} \\ 5.- a) 10x\sqrt{2x}; b) xy \sqrt[5]{81x^4}; c) 5ac^2 \sqrt{a}; d) 2^3 a^2 b; e) 3a^2 b^2 c \sqrt{2ac} \\ 6.- a) \sqrt{125}; b) \sqrt[4]{4^5}; c) \sqrt{32}; d) \sqrt{27}; e) \sqrt{48a^3 b^3} \\ 7.- a) \sqrt[6]{2^5}; b) 2; c) 3 \sqrt[3]{3^2}; d) \sqrt[12]{x^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[12]{x}} = \frac{\sqrt[12]{x^{11}}}{x}; e) 2 \sqrt[9]{2} \\ 8.- a) 2\sqrt{2}; b) 32; c) x^4; d) 2^4 \cdot 3^2 = 144; e) 3 \sqrt[3]{3}; f) 3^2 = 9 \\ 9.- a) 3; b) \sqrt[4]{2^3}; c) 3; d) 2 \sqrt[3]{2}; e) 2 \sqrt[12]{2}; f) \sqrt[8]{2^7} \\ 10.- a) 7\sqrt{3}; b) -\sqrt{3}; c) 3\sqrt{6}; d) -15\sqrt{2}; e) 17\sqrt{3}; f) -11\sqrt{7}; g) 12 \sqrt[3]{2} + 9; h) 507\sqrt{10} \\ 11.- a) \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}; b) \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}; c) \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}; d) -10\sqrt{3} + \frac{15}{2}\sqrt{6}; e) \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}; f) \sqrt{2}; g) \sqrt[4]{27}; h) \sqrt[3]{a} \end{array}$$

COMPLEMENTARIOS:

1) Calcula:

$$\begin{array}{l} a) \left(\sqrt[15]{-2 + \sqrt{100}}\right)^5 - \left(-1 - \sqrt[3]{-27}\right)^2 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} \\ b) \sqrt{6 + 4 \cdot \sqrt{2}} \times \sqrt{6 - 4 \cdot \sqrt{2}} \\ c) \left(\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}\right)^2 \\ d) \sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{81}}} + \sqrt[5]{\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{64}} \end{array}$$

## RADICALES(2)

1°.- ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

a) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$	b) $\sqrt{4} + \sqrt{36} = \sqrt{40}$	c) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{225}$
d) $\sqrt{36} - \sqrt{4} = \sqrt{32}$	e) $\sqrt{100} : \sqrt{4} = \sqrt{25}$	f) $\sqrt{36} : \sqrt{4} = \sqrt{9}$

2°.- Calcula el valor de "a" para que las siguientes raíces sean exactas:

a) $\sqrt{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot a}$	b) $\sqrt{2 \cdot a \cdot 3^2 \cdot 5^3}$	c) $\sqrt{9 \cdot a \cdot 2 \cdot 5^3}$
d) $\sqrt{a \cdot 3^3 \cdot 5}$	e) $\sqrt{25 \cdot a \cdot 27}$	f) $\sqrt{3 \cdot 75 \cdot a}$

3°.- Halla el valor de las letras en las siguientes igualdades:

a) $\sqrt{a} = 15$	b) $\sqrt{2x} = 5$	c) $\sqrt{3a} = 9$	d) $\sqrt{20x} = 10$
e) $\sqrt{6x} = 12$	f) $\sqrt[3]{2b} = 2$	g) $\sqrt[3]{27a} = 3$	h) $\sqrt[4]{27x} = 3$

4°.- Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{\sqrt{4} + \sqrt{3}}{\sqrt{4} - \sqrt{3}}$	b) $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$	c) $\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$	d) $\frac{7 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
e) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$	f) $\frac{3}{\sqrt{5} + 2}$	g) $\frac{8}{6 - \sqrt{12}}$	h) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$
i) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$	j) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$	k) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$	l) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} - \sqrt{c}}$

5°.- Realiza las operaciones que creas convenientes (sumar, multiplicar, dividir, racionalizar, etc...), para simplificar las siguientes expresiones con radicales:

a) $\frac{\sqrt{10000} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt[3]{10^2} \cdot 1000}{10^2 \cdot \sqrt{10} \sqrt{100} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{100}}$	b) $\sqrt{28\sqrt{81}\sqrt{256}}$
c) $\sqrt{9000} + 10\sqrt{10^5} - 3\sqrt{16000} + 4\sqrt{90}$	d) $(3 + 9)\sqrt{5} - \sqrt{125} + \sqrt{5a^2}$
e) $\sqrt{ab} \sqrt{\frac{c}{ab}}$	f) $\sqrt{4a^2b} - \sqrt{9ab^2} + 3\sqrt{a} - 2a\sqrt{b}$
g) $\sqrt{\frac{16}{3}} - 2\sqrt{\frac{4}{3}} + 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 2\sqrt{\frac{25}{3}}$	h) $\sqrt[3]{bc^2} \sqrt{\frac{a}{c}}$
i) $\sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}}}$	j) $\sqrt{\frac{4ab^2}{cd}} \cdot \sqrt[4]{\frac{bcd^2}{2a}}$
k) $(2\sqrt{8} + 3) \cdot (3\sqrt{2} - 1)$	l) $\sqrt{abc^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2c}{b}} \cdot \sqrt[6]{\frac{ab}{c^3}}$

$$m) \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}}$$

$$n) \sqrt{\frac{8}{9}} - 3 \sqrt{\frac{2}{9}} - 2 \sqrt{\frac{2}{16}} + \sqrt{32}$$

$$o) \left( \sqrt[3]{a^2 b} \sqrt[4]{a^3 b^5} \right)^2$$

$$p) \frac{\sqrt{2 a b} \cdot \sqrt[3]{2 a^2 b}}{\sqrt[6]{2 a b}}$$

$$q) \sqrt[3]{8 a} \sqrt{a^4 b^3}$$

$$r) (\sqrt{2} + \sqrt{8}) \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{8})$$

$$s) \left( 2 \sqrt[3]{a^2 b c^3} \right)^2$$

$$t) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^6 a^2}}{\sqrt[3]{b^9 c^3}}}$$

6°.- De las siguientes igualdades corrige las que no sean verdaderas:

$$a) \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad b) \sqrt{(a+b)^2} = a + b \quad c) \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad d) \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$7°.- \text{¿Cuánto vale: a) } \left[ \left( (0'01)^{-1/2} \right)^{2/3} \right]^{3/4}; \text{ b) } \sqrt[3]{\frac{(0'004)^4 (0'0036)}{(120.000)^2}}; \text{ c) } \frac{10^{x+y} \cdot 10^{y-x} \cdot 10^{y+1}}{10^{y+1} \cdot 10^{1+2y}}?$$

**Soluciones:**

1°: c) e) f) sí

2°: a) a=6; b) a=10; c) a=10; d) a=15; e) a=3; f) a=1

3°: a) a=225; b) x=25/2; c) a=27; d) x=5; e) x=24; f) b=4; g) a=1; h) x=3

$$4°: a) 7 + 2\sqrt{12}; b) \sqrt[4]{a}; c) 4\sqrt{3}; d) \frac{7\sqrt{3} - 6}{3}; e) \sqrt[4]{a}; f) 3\sqrt{5} - 6; g) \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}; h) -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$i) 3\sqrt{6} - 6; j) -3 - 2\sqrt{2}; k) 2\sqrt{6} - 5 \quad l) \frac{a + c + 2\sqrt{ac}}{a - c}$$

$$5°: a) \frac{1}{\sqrt[12]{10}}; b) 12\sqrt{7}; c) 922\sqrt{10}; d) (7+a)\sqrt{5}; e) \sqrt[4]{abc}; f) (3-3b)\sqrt{a}; g) -9\sqrt{\frac{1}{3}}; h) \sqrt[6]{b^2 c^3 a}; i) 2$$

$$j) \sqrt[4]{\frac{8ab^5}{c}}; k) 21 + 5\sqrt{2}; l) \sqrt[3]{a^4 b c^4}; m) \sqrt[3]{a}; n) \frac{19}{6}\sqrt{2}; o) ab\sqrt[6]{a^5 b^3}; p) \sqrt[3]{2^2 a^3 b^2}; q) 2a\sqrt{b}$$

$$r) 0; s) 2^2 a c^2 \sqrt[3]{ab^2}; t) \frac{x}{b} \sqrt[3]{\frac{a}{c}}$$

**COMPLEMENTARIO:**

Calcula:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(-2)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}}{-2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{6}{5}} - \frac{\sqrt[3]{16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}}{-2 - (-4)}}{\frac{-\frac{1}{3} + \frac{5}{2}}{-2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 - \frac{6}{5}} - \frac{1}{2} - 1 + (-1)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$$

Sol: -2