

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{array}{r|rrrrr} c) & 1 & -7 & 5 & 0 & -13 \\ & -1 & & -1 & 8 & -13 & 13 \\ \hline & 1 & -8 & 13 & -13 & \underline{0} \end{array}$$

P_3 es divisible por $x + 1$. No puede ser divisible por $x - 3$ porque 13 no es múltiplo de 3.

PÁGINA 54

- 15 ■■■ El polinomio $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a . Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ -4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 1 & -6 & \underline{0} \end{array}$$

Es divisible por $x + 4$.

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ 6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & \underline{0} \end{array}$$

Es divisible por $x - 6$.

COCIENTE: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

- 16 ■■■ Prueba si el polinomio $-x^4 + 3x^2 - 16x + 6$ es divisible por $x - a$ para algún valor entero de a .

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 0 & 3 & -16 & 6 \\ -3 & & 3 & -9 & 18 & -6 \\ \hline & -1 & 3 & -6 & 2 & \underline{0} \end{array}$$

Es divisible por $x + 3$.

- 17 ■■■ Si $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$, halla los valores $P(8,75)$, $P(10,25)$ y $P(-7)$ con ayuda de la calculadora.

Describe el proceso como en el ejemplo:

8,75 (Min)

$$3 \times \text{MR} - 11 = \times \text{MR} - 81 = \times \text{MR} + 245 = 703.828$$

$$P(8,75) = 703,828...$$

$$10,25 \text{ (Min)} \quad 3 \times \text{MR} - 11 = \times \text{MR} - 81 = \times \text{MR} + 245 = 1489,7347...$$

$$P(10,25) = 1489,73$$

$$7 \text{ (+/-) (Min)} \quad 3 \times \text{MR} - 11 = \times \text{MR} - 81 = \times \text{MR} + 245 = -756$$

$$P(-7) = -756$$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Factorización de polinomios

18 ■■■ Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$

d) $3x^2 + 9x - 210$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5, x = 1$

$$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5, x = -3$

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8, x = -5$

$$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10, x = 7$

$$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$$

19 ■■■ Busca, en cada caso, una raíz entera y factoriza, después, el polinomio:

a) $2x^2 - 9x - 5$

b) $3x^2 - 2x - 5$

c) $4x^2 + 17x + 15$

d) $-x^2 + 17x - 72$

a) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

b) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

c) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

d) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

20 ■■■ Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$

f) $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

21 ■■■ Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

22 ■■■ Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

a)	1	2	-1	-2	
1		1	3	2	
	1	3	2	0	
-1		-1	-2		
	1	2	0		

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Sus raíces son 1, -1 y -2.

$$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x-1)(x-4)$$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

b)	3	-15	12	
1		3	-12	
	3	-12	0	
4		12		
	3	0		

c)	1	-9	15	-7
1		1	-8	7
	1	-8	7	0
1		1	-7	
	1	-7	0	

$$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x-1)^2(x-7)$$

Sus raíces son 1 y 7.

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2; x = -2; x = 3; x = -3$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

Sus raíces son 2, -2, 3 y -3.

23 ■■■ Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$

d) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

a)	1	-2	-2	-3	$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x^2 + x + 1)$
3		3	3	3	Raíz: 3
	1	1	1	0	

b)	2	-7	-19	60	$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x+3)(x-4)(2x-5)$
-3		-6	39	-60	Raíces: -3, 4 y $\frac{5}{2}$
	2	-13	20	0	
4		8	-20		
	2	-5	0		

c)	1	0	-1	-6	$x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$
2		2	4	6	Raíz: 2
	1	2	3	0	

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

d)	4	4	-3	-4	-1	$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$
1		4	8	5	1	$= (x-1)(x+1)(4x^2 + 4x + 1) =$
	4	8	5	1	0	$= (x-1)(x+1)(2x+1)^2$
-1		-4	-4	-1		Raíces: 1, -1 y $-\frac{1}{2}$
	4	4	1		0	

Fracciones algebraicas

24 ■■■ Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{x-4}{3x-12}$ y $\frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2+x}{2x}$ y $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\frac{1}{x-y}$

d) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque $3(x-4) = 3x-12$.

b) No son equivalentes, ya que $2(x^2+x) \neq 2x^2$.

c) Sí son equivalentes, porque $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.

d) Sí son equivalentes, porque $(2x-2)x = 2x^2-2x$.

25 ■■■ Descompón en factores y simplifica.

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x}{x+y}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \frac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \frac{x-3y}{2y}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

26 ■■■ Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{6-x+3x}{3x^2} = \frac{2x+6}{3x^2}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{2x+4+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x}{x^2-4}$

27 ■■■ Efectúa.

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x}$

d) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2+6-2x}{2x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6-x(x+1)}{3x^2} = \frac{6-x^2-x}{3x^2}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2-3(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2-3x+9}{x^2-3x}$

d) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)-x(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{-9-x}{x^2+4x+3}$

28 ■■■ Opera.

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1}$

b) $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x}$

d) $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3}$

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x^2+x}{3x-3}$

b) $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x} = \frac{3x}{x^2-1}$

d) $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3} = \frac{4x^2+6x}{2x^2-x-3}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

29 ■■■ Opera y simplifica si es posible.

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x}$

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{x+1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$

30 ■■■ Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$

d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \frac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$