

Unidad 4 – Inecuaciones y sistemas

PÁGINA 75

preguntas iniciales

1. Dos segmentos miden 10 y 15 cm, respectivamente. ¿Qué dimensiones puede tener un tercer segmento para que forme triángulo con los anteriores?
2. La desigualdad $25 > 15$ es verdadera. Estudia si son verdaderas las desigualdades siguientes:
a) $25 + 5 > 15 + 5$ c) $25 \cdot 4 > 15 \cdot 4$ e) $25(-3) > 15(-3)$
b) $25 - 6 > 15 - 6$ d) $25 / 5 > 15 / 5$ f) $25 / (-5) > 15 / (-5)$
3. Comprueba si los valores que se indican son soluciones de las inecuaciones correspondientes:
a) $x = 3, x = 4, x = 5$ de $x^2 + 3x > 30$
b) $x = -2, x = 6$ de $x + 2 < 8 - x$
c) $x = 0, x = 2$ de $\frac{2x + 3}{x - 1} > 1$
d) $x = 0, x = 1$ de $\frac{2x + 1}{x - 2} > \frac{1}{2}$
4. Un vehículo se desplaza en línea recta con una velocidad superior a 75 m/s e inferior a 110 m/s. ¿Entre qué distancias se encuentra el móvil al cabo de dos horas?

SOLUCIONES

1. La medida del tercer segmento debe estar entre 5 y 25 cm.
2. En cada uno de los casos:

Son verdaderas las desigualdades: a), b), c) y d).
Son falsas las desigualdades: e) y f).
3. En cada uno de los casos:

a) Los valores de $x=3$ y $x=4$ no son soluciones de la inecuación dada. Sin embargo, $x=5$ sí lo es.
b) El valor $x=-2$ es solución de la inecuación dada y $x=6$ no lo es.
c) El valor $x=0$ no es solución de la inecuación dada y $x=5$ sí lo es.
d) Los valores $x=0, x=1$ no son soluciones de la inecuación.
4. Entre 540 km y 792 km.

ACTIVIDADES

■ Practica lo dicho anteriormente con los siguientes problemas

- 1. Relaciones familiares.** Por ahí vienen nuestros padres, padres de nuestros hijos, maridos de nuestras madres y nuestros propios maridos. ¿Es esto cierto?
- 2. Animado baile.** Cuarenta y dos personas toman parte en un baile. Durante la velada, una primera dama bailó con siete caballeros; una segunda, con ocho; una tercera, con nueve; y así sucesivamente hasta la última, que bailó con todos los caballeros. ¿Cuántas damas había en aquel baile?
- 3. La perra Cati.** Luis va todos los días desde su casa a la sierra más cercana, que dista 1,5 km. Va acompañado de su perra mastina *Cati*, que va corriendo a la sierra. Cuando la perra llega a la sierra, vuelve con Luis y así sucesivamente, hasta que Luis llega a la sierra. Luis camina a 6 km/h y *Cati* va a 16 km/h. ¿Cuántos km recorre *Cati*?
- 4. La edad de Astérix.** ¿Qué edad tenía Astérix en el año 2000, sabiendo que esa edad es igual a la suma de las tres últimas cifras de su año de nacimiento?

SOLUCIONES

1. Sí puede ser cierto; se trata de dos padres que se han casado cada uno con la hija del otro.

2. Diremos que:

$$a_1 = 7$$

$$a_2 = 8$$

.

$$a_n = 7 + (n-1) \cdot 1 = n + 6$$

Además sabemos que $a_n + n = 42 \Rightarrow n = 18$ damas.

$$a_n = 42 - 18 = 24 \text{ caballeros.}$$

Había 18 damas y 24 caballeros.

3. Luis tarda 15 minutos en llegar a la sierra.

La perra, por lo tanto, ha estado moviéndose durante 15 minutos.

Por tanto ha recorrido: $16 \frac{\text{km}}{\text{h}} : 4 = 4$ kilómetros.

4. Diremos que:

$$\left. \begin{array}{l} 2000 - 19xy = 9 + x + y \\ 2000 - (1000 + 900 + 10x + y) = 9 + x + y \\ \Rightarrow 11x + 2y = 91 \Rightarrow x = 7 \quad y = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Es decir, Astérix nació en el año 1 977} \\ \text{y en el año 2 000 tendrá 23 años.} \end{array}$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

■ 1. Comprueba si los valores $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ son soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $3 - x < 2 + 5x$

d) $\frac{2x+3}{x-1} \leq 2$

g) $x(x+4) < 2x^2$

b) $1 + x > 2 - 3x$

e) $\frac{x-1}{x+3} > 3$

h) $(x+2)^2 > 9$

c) $x^2 - 2x + 8 < 0$

f) $\frac{2x+1}{x+5} > \frac{2}{3}$

i) $\frac{(x-1)^2 - 6}{3 - 2x} > 1$

■ 2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2(3x - 3) > 6$

c) $2(x + 3) + 3(x - 1) > 2(x + 2)$

e) $2(3 + x) > \frac{8+x}{3}$

b) $3(3 - 2x) < 2(3 + x)$

d) $\frac{3x-3}{5} - \frac{4x+8}{2} < \frac{x}{4} - 3x$

f) $\frac{x+1}{2} - 3x \geq \frac{1-5x}{3} + 4$

■ 3. Asocia a cada inecuación su conjunto de soluciones correspondientes:

1) $\frac{x+1}{10} \leq 2x - 17$

a) $(-9, +\infty)$

2) $3x - 7 > x - 1$

b) $(-\infty, 6]$

3) $\frac{4x-6}{7} < x + 3$



4) $2(x - 3) \leq x$

d) $x > 3$

■ 4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 1 - x < 2 - 3x \\ 3 + x < 2 + 5x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 7 > 5 - x \\ 3x + 1 \leq x - 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{x+3}{2} \leq x \\ \frac{4x-2}{4} - \frac{x-1}{3} \geq x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{5} < 3 \\ x < \frac{4-2x}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{5} > 8 \\ \frac{x}{2} - \frac{4x}{9} > 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{x}{7} < 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{5} > -6 \end{cases}$

■ 5. Asocia, de forma razonada, las siguientes soluciones con sus sistemas correspondientes:

a) $\begin{cases} 2x - 3 < 4x - 5 \\ x + 1 > \frac{7x-2}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x < 3 \\ x + 6 \leq 6 \\ 2(x + 1) \geq x \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x < -6 \\ x \geq 0 \\ -1 < x \end{cases}$

i) $(3, +\infty)$

ii) $[-2, 0]$

iii) $(1, 2)$

■ 6. Juan tiene la costumbre de subir la escalera de su casa saltando los escalones de 2 en 2 y la baja con saltos de 3 en 3. No recuerda con exactitud cuántos saltos da entre la subida y la bajada: entre 45 y 50. ¿Cuántos escalones tiene la escalera de su casa?

■ 7. En un concurso organizado en el aula, una de las pruebas consiste en tirar una moneda 20 veces. Si sale cara al jugador se le asignan 10 000 puntos y si sale cruz, 6 000. ¿Cuántas caras y cruces han podido salir si se sabe que ha ganado menos de 176 000 puntos?

■ 8. Un vendedor recibe una cantidad fija al mes de 600 euros, además de un 5% de las ventas que realice. ¿Qué cantidad debe vender para tener un sueldo mensual comprendido entre 1 200 y 1 500 euros?

SOLUCIONES

1. Los resultados pueden verse en la tabla que sigue:

Inecuación	$x=-2$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$x=2$
a)	no	no	no	sí	sí
b)	no	no	no	sí	sí
c)	no	no	no	no	no
d)	sí	sí	sí	no	no
e)	no	no	no	no	no
f)	no	no	no	no	sí
g)	sí	sí	no	no	no
h)	no	no	no	no	sí
i)	no	no	no	no	sí

2. Las soluciones quedan:

$$a) 2(3x-3) > 6 \Leftrightarrow 6x-6 > 6 \Leftrightarrow 6x > 12 \Leftrightarrow x > 2$$

$$b) 3(3-2x) < 3(3+x) \Leftrightarrow 9-6x < 6+2x \Leftrightarrow -8x < -3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{8}$$

$$c) 2(x+3)+3(x-1) > 2(x+2) \Leftrightarrow 2x+6+3x-3 > 2x+4 \Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$d) \frac{3x-3}{5} - \frac{4x+8}{2} < \frac{x}{4} - 3x \Leftrightarrow 12x-12-40x-80 < 5x-60x \Leftrightarrow 27x < 92 \Leftrightarrow x < 3,41$$

$$e) 2(3+x) > \frac{8+x}{3} \Leftrightarrow 6+2x > \frac{8+x}{3} \Leftrightarrow 18+6x > 8+x \Leftrightarrow 5x > -10 \Leftrightarrow x > -2$$

$$f) \frac{x+1}{2} - 3x \geq \frac{1-5x}{3} + 4 \Leftrightarrow 3x+3-18x \geq 2-10x+24 \Leftrightarrow -5x \geq 23 \Leftrightarrow x \leq -\frac{23}{5}$$

3. Las asociaciones quedan: 1 \rightarrow c) 2 \rightarrow d) 3 \rightarrow a) 4 \rightarrow b)

4. Los sistemas quedan:

$$a) \begin{cases} 1-x < 2-3x \\ 3+x < 2+5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ -4x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{La solución es el rango: } x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

$$b) \begin{cases} x + \frac{1}{5} < 3 \\ x < \frac{4-2x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{14}{5} \\ 5x < 4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{14}{5} \\ x > \frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{La solución es el rango: } x \in \left(-\infty, \frac{4}{7}\right)$$

$$c) \begin{cases} 5x-7 > 5-x \\ 3x+1 \leq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x > 12 \\ 2x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{El sistema no tiene solución.}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{5} > 8 \\ \frac{x}{2} - \frac{4x}{9} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3x > 120 \\ 9x-8x > 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x > 90 \end{cases} \Rightarrow \text{La solución es el rango: } x \in (90, +\infty)$$

$$e) \begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{x+3}{2} \leq x \\ \frac{4x-2}{4} - \frac{x-1}{3} \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2-3x-9 \leq 6x \\ 12x-6-4x+4 \geq 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x \leq 11 \\ -4x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{11}{7} \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{La solución es el rango: } x \in \left[-\frac{11}{7}, -\frac{1}{2}\right]$$

$$f) \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{x}{7} < 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{5} > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-5x < 70 \\ 5x-3x > -90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 35 \\ x > -45 \end{cases} \Rightarrow \text{La solución es el rango: } x \in [-45, 35]$$

5. La solución es: a) con iii); b) con ii); c) con i)

6. Llamando x al número de escalones, tenemos:

$$45 < \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 50 \Leftrightarrow 45 < \frac{5x}{6} < 50 \Leftrightarrow 9 < \frac{x}{6} < 10 \Leftrightarrow 54 < x < 60$$

El número de escalones está comprendido entre 54 y 60.

7. Llamando x al número de caras y $(20-x)$ al número de cruces obtenemos:

$$10000 \cdot x + 6000 \cdot (20-x) < 176000 \Rightarrow x < 14 \Rightarrow \text{El máximo número de caras conseguido es 14.}$$

8. Llamando x a la cantidad que debe vender cumple:

$$1200 < 600 + 0,05 \cdot x < 1500 \Rightarrow 12000 < x < 18000$$

Debe vender una cantidad entre 12 000 y 18 000 euros.

■ 9. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$

c) $(x + 1)^2 - 8x + 4 \geq 0$

e) $x^3 - 11x^2 + 10x \leq 0$

b) $9x^2 - 6x + 1 > 0$

d) $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{11x+2}{15} < \frac{x^2-1}{3}$

f) $x^3 - 1 > 0$

■ 10. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{3}{x-2} > 0$

c) $\frac{-10}{x-2} < 0$

e) $\frac{1}{x} > 1$

b) $\frac{3-x}{x+3} \leq 0$

d) $\frac{6-2x}{x+3} \geq 1$

f) $\frac{x+1}{x-1} + 2 < 0$

■ 11. ¿Qué números reales verifican que su cuadrado es menor que su cuádruplo?

■ 12. Sin hacer la representación gráfica, estudia para qué valores de x la función $f(x) = -x^2 + 4x$ es positiva.

■ 13. Deseamos construir un cuadro metálico de forma cuadrada. El interior del cuadrado es de acero que vale a 150 euros el metro cuadrado y el marco de cobre cuesta 30 euros el metro. ¿Qué longitud tendrá como máximo el lado del cuadrado si no disponemos de más de 620 euros?

■ 14. Estudia en cada una de las siguientes inecuaciones si los puntos que se dan son o no soluciones de la misma:

a) $3x + 2y > 5$; $A(1, 2), B(-1, 2), C(-2, 1)$ y $M(0, 0)$

b) $4x + 3y \leq -2$; $D\left(\frac{1}{4}, 1\right), E\left(-\frac{1}{2}, -1\right), F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y $G\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$

■ 15. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x - 2y < 0$

b) $5x - 2y \geq 3$

c) $-2x - y > 2$

■ 16. Busca el conjunto solución o región factible en los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ -x + y > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y \leq 2 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$

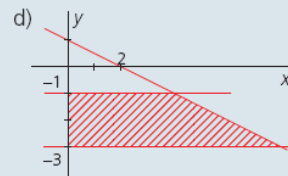
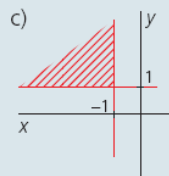
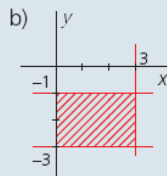
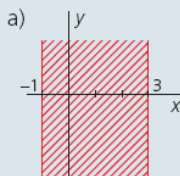
e) $\begin{cases} y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x > y \\ x < y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y > x - 1 \\ x \geq 0 \\ y \leq 4 \\ 2x \leq 5 - y \end{cases}$

f) $\begin{cases} x > 1 - y \\ y < 2 \\ x > -2 \end{cases}$

■ 17. Escribe los sistemas de inecuaciones que representan las regiones rayadas siguientes:



SOLUCIONES

9. La solución en cada caso es:

a) $-x^2 + 3x + 10 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \geq 0 \Rightarrow$ La solución queda: $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$

b) $9x^2 - 6x + 1 > 0 \Rightarrow (3x - 1)^2 > 0 \Rightarrow$ La solución queda: $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

c) $(x+1)^2 - 8x + 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 \geq 0 \Rightarrow$ La solución queda: $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

d) $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{11x+2}{15} < \frac{x^2-1}{3} \Rightarrow x+12 < 0 \Rightarrow$ La solución queda: $(-\infty, -12)$

e) $x^3 - 11x^2 + 10x \leq 0 \Rightarrow$ La solución queda: $(-\infty, 0] \cup [1, 10]$

f) $x^3 - 1 > 0 \Rightarrow$ La solución queda: $[1, +\infty)$

10. Las soluciones quedan:

a) Solución: $(2, +\infty)$

d) Solución: $(-3, 3]$

b) Solución: $(-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$

e) Solución: $(0, 1)$

c) Solución: $(2, +\infty)$

f) Solución: $\left(\frac{1}{3}, 1 \right)$

11. Todos los números x que verifiquen $x^2 < 4x$, es decir, los valores del intervalo $(0, 4)$.

12. Todos los números x que verifiquen $-x^2 + 4x > 0$, es decir, los valores del intervalo $(0, 4)$.

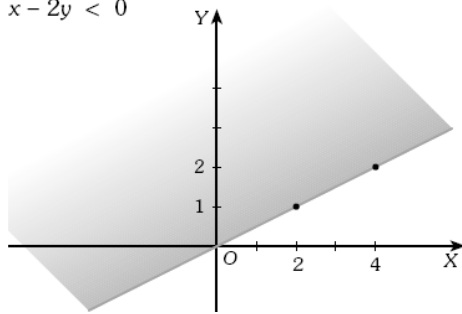
13. Llamando x al lado del cuadrado obtenemos: $150 \cdot x^2 + 30 \cdot 4x \leq 620$.

Las soluciones son los valores de x que estén en el intervalo $(-2, 47; 1, 67)$. Luego la longitud máxima del cuadro es de 1,67 metros.

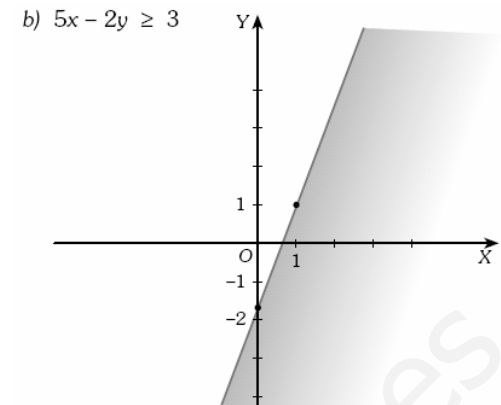
14. Las soluciones de las inecuaciones son: a) El punto A b) Los puntos E, F y G.

15. Las soluciones son las regiones rayadas.

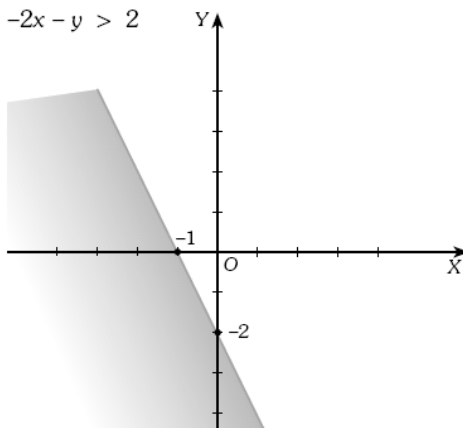
a) $x - 2y < 0$



b) $5x - 2y \geq 3$

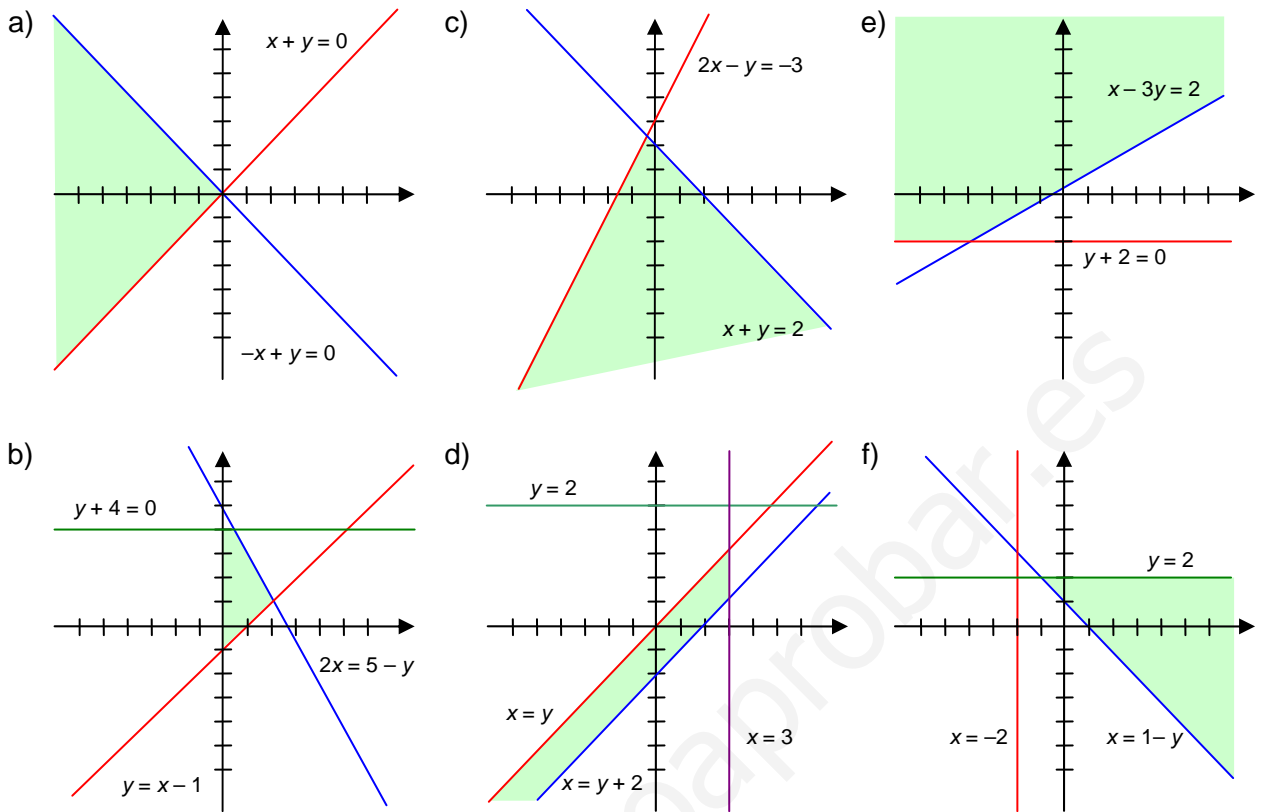


c) $-2x - y > 2$



www.yoquieroaprobar.es

16. En cada uno de los casos queda:



17. Los sistemas de inecuaciones son:

a) $\begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \\ y > -3 \\ y < -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x < -1 \\ y > 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y > -3 \\ y < -1 \\ x + 2y < 2 \end{cases}$

ACTIVIDADES FINALES

- 18. Encuentra los vértices de las regiones factibles solución de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

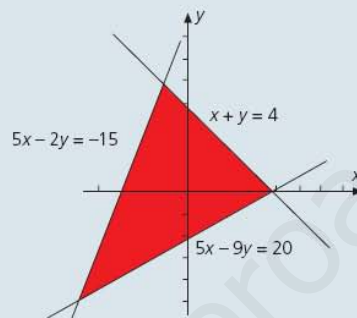
a)
$$\begin{cases} x - y > 0 \\ y > 0 \\ x + y - 6 < 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -1 \\ x < 0 \\ x - y + 3 > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y \geq -4 \\ x - y + 1 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ y > x \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

- 19. En el dibujo está representada la región factible que es solución de un sistema de inecuaciones. Busca el citado sistema y halla los vértices de esta región factible.



- 20. Halla el área de la parte del plano que cumple las condiciones:

$$y > x, \quad x > -5, \quad -2 < y < 2$$

- 21. Un quiosco vende bolígrafos a 0,2 euros y cuadernos a 0,6 euros. Llevamos 2 euros y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos por lo menos. ¿Cuál será el máximo número de piezas que podemos comprar?
- 22. La edad de un padre es 30 años mayor que la de su hijo. ¿Para qué edad del hijo la edad del padre supera en 6 años el doble de la del hijo?
- 23. Con un cordel de 8 m queremos rodear un triángulo isósceles. ¿Qué medida puede tener este triángulo?
- 24. Entre dos cofres tienen más de 10 monedas. El número de monedas del cofre rojo disminuido en 6 es inferior al triple del número de monedas del otro cofre. ¿Cuántas monedas puede contener cada uno de estos cofres?
- 25. En un campeonato de mus, cada partida ganada vale 2 puntos y cada partida perdida, 1 punto; además, no puede haber empates. A una pareja le faltan diez partidas por disputar. Para conseguir dicho campeonato tendrán que lograr un mínimo de 16 puntos. ¿Cuántas partidas han de ganar?
- 26. Mezclamos azúcar de 2 euros/kg con otra de 3 euros/kg, y queremos obtener una mezcla de calidad intermedia cuyo precio no sobrepase las 2,6 euros/kg. Para conseguir 60 kg de esta calidad intermedia, qué condiciones deberán cumplir los pesos de las dos clases mezcladas?



SOLUCIONES

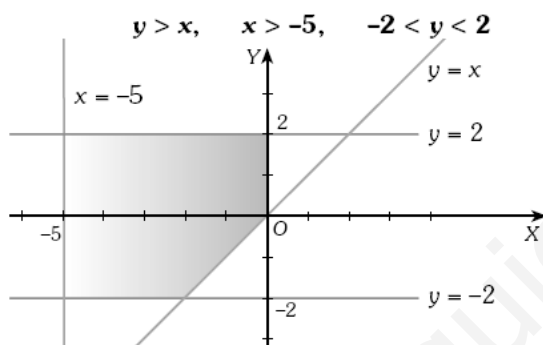
18. En cada caso quedan:

- a) (0,0); (0,6); (3,3) c) (-4,-1); (-1,2); (0,2); (0,-1)
 b) (-1,0); (-5,-4); (3,-4) d) (0,0); (0,6); (4,4)

19. El sistema y los vértices quedan:

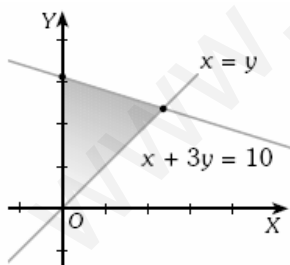
$$\left. \begin{array}{l} 5x - 2y > -15 \\ x + y < 4 \\ 5x - 9y < 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Los vértices son: } (-1,5); (-5,-5); (4,0)$$

20. El cálculo sobre el recinto queda:



El área del recinto es de 18 unidades cuadradas.

21. Sean x e y el número de bolígrafos y cuadernos, respectivamente, que podemos comprar. Se debe cumplir:



$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x \leq y \\ 0,2x + 0,6y \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Las soluciones son el conjunto de pares enteros dentro del recinto rayado. Es decir: } (0,1) (0,2) (0,3) (1,1) (1,2) (1,3) (2,2)$$

22. Para que se cumplan las condiciones del enunciado el hijo debe tener 24 años como mínimo. Este resultado satisface al sistema que se obtiene del enunciado, llamando P a la edad del padre y H a la del hijo:

$$\left. \begin{array}{l} P - H > 30 \\ P = 2H + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow H > 24 \text{ años}$$

23. Llamando x e y a los lados del triángulo, debe cumplirse:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases} \quad \text{Las medidas serán las coordenadas de la región de soluciones del sistema de inecuaciones anterior. Estas aparecen a continuación en la región sombreada.}$$

24. Llamando x al número de monedas del cofre rojo, e y al número de monedas del otro cofre. Dichas cantidades deben cumplir el sistema:

$$\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x + y > 10 \\ x - 3y < 6 \end{cases} \quad \text{Las soluciones del problema son las coordenadas enteras de los puntos que aparecen en la región marcada en el siguiente diagrama.}$$

25. Llamamos x al número de partidas ganadas; se debe cumplir:

$$2 \cdot x + (10 - x) \cdot 1 \geq 16 \Rightarrow x \geq 6 \Rightarrow \text{Por tanto ha de ganar más de 5 de las 10 partidas.}$$

26. Se debe cumplir: $2 \cdot x + 3 \cdot (60 - x) \leq 2,6 \cdot 60 \Rightarrow x \geq 24$

Por tanto deben mezclarse 24 o más kilos de 2 euros/kg con 36 o menos kilos de 3 euros/kg.