EJERCICIOS DE DERIVADAS Y GRÁFICAS

1.- (Usando la definición de derivada de una función en un punto)

Halla la derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisas 4 y 5.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(4+h) - (4+h)^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{20 + 5h - 16 - h^2 - 8h - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-h-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h - 3) = -3$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(5+h) - (5+h)^2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)(5-5-h)}{h} = \lim_{h \to 0} (-5 - h) = -5$$

2.- (Usando la definición de derivada de una función en un punto)

Halla la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(1+h-2)] - (-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-1)] + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h - 3}{(h-1)h} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(-1+h-2)] - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-3)] + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 3}{h(h-3)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(5+h-2)] - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h+3)] - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{h(h+3)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h+3} = -\frac{1}{3}$$

3.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

   $f'(x) = 6x - 6$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

   $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{5x}}$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

   $$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

5. $f(x) = sen\, x \cos x$

   $f'(x) = \cos^2 x - sen^2 x$

6. $f(x) = tg\, x$

   $$f'(x) = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7. $f(x) = x\, e^x$

   $f'(x) = e^x + x\, e^x = e^x(1 + x)$

8. $f(x) = x \cdot 2^x$

   $f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$

9. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$

   $$f'(x) = 2x \log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x \ln 2}$$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

    $$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\, 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

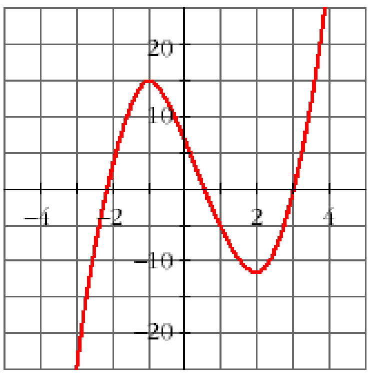
4.- Estudia Dominio, simetrías, cortes con ejes, máximos, mínimos, puntos de inflexión, además de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y

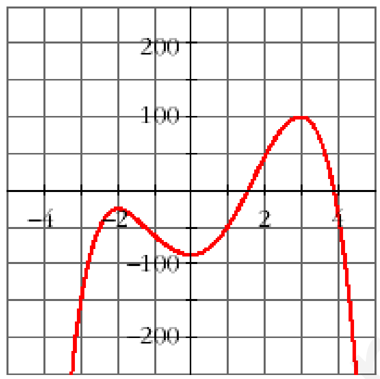
Representa estas funciones:

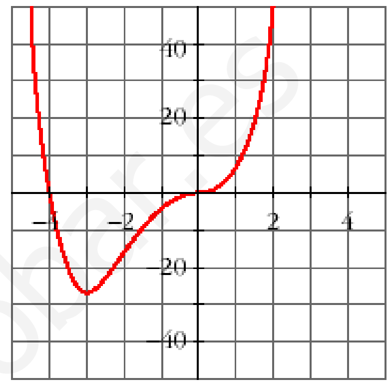
a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

c) $y = x^4 + 4x^3$







5.-

Halla la función derivada de estas funciones:

26 **a)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **b)** $y = (x^2 - 3)^3$

a) $y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $y' = 6x(x^2 - 3)^2$

27 **a)** $y = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $y' = 1$ (si $x \neq 0$) b) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28 **a)** $y = \sqrt[3]{(x + 6)^2}$ **b)** $y = sen\ \sqrt{x}$

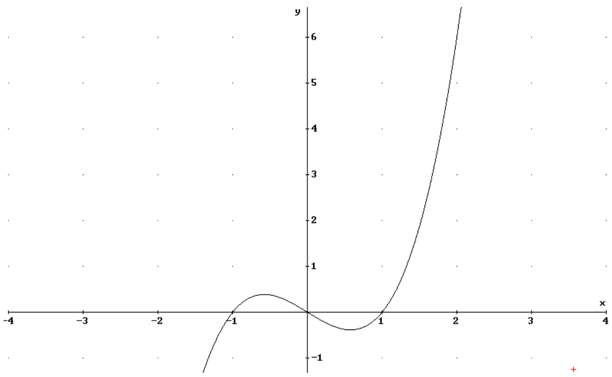
a) $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x + 6)}}$ b) $y' = \dfrac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

29 **a) $y = (x-2)^x$** **b) $y = (\text{sen } x)^x$**

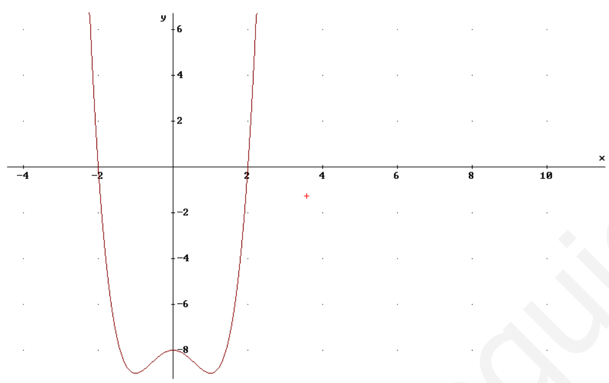
(haced este ejercicio por derivación logarítmica)

6.- Estudia y representa las siguientes funciones:

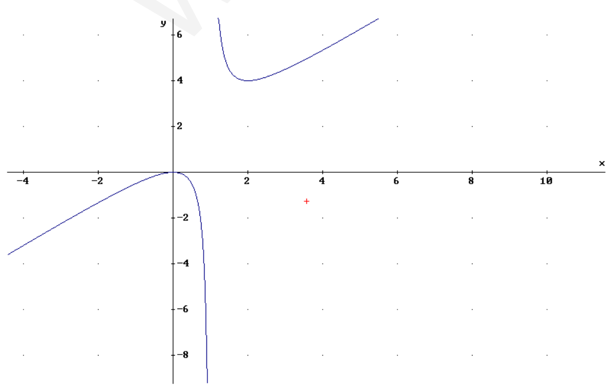
1) $y=x^3-x$



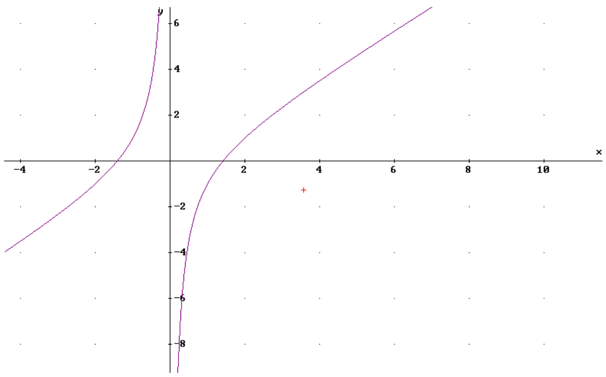
2) $y=x^4-2x^2-8$



3) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$



4) $y = x - \dfrac{2}{x}$



7.-

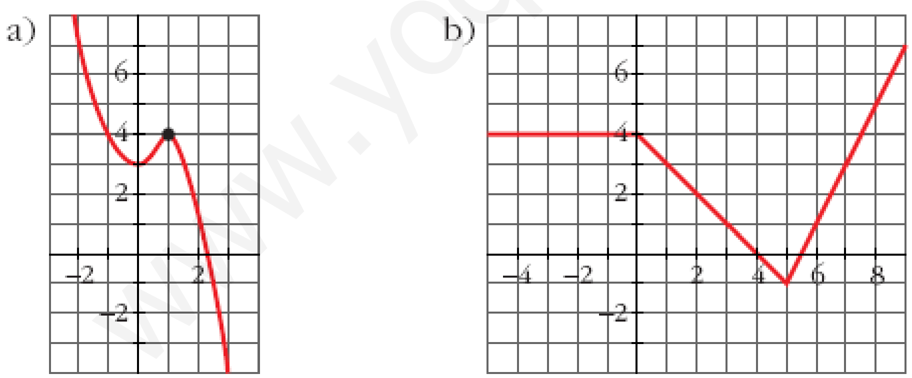
Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

a) $y = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 1 \\ 5 - x^2 & x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 4 - x & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x - 11 & x > 5 \end{cases}$

Hazlo sin mas que realizar tablas de valores

Solución:



8.- Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$

f) $f(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

Solución

a) Asíntota vertical: $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 2$

b) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 1$

c) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

d) Asíntota vertical: $y = 0$

No tiene más asíntotas.

e) Asíntota vertical: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

f) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

9.-

Estudia el comportamiento de estas funciones en los puntos en los que no están definidas:

a) $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x-5}$

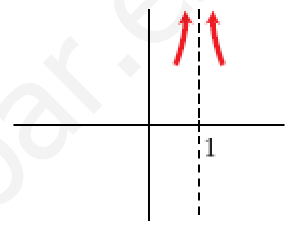
c) $y = \dfrac{1}{x^2-2x}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2-4}$

Solución

a) $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

No definida en $x = 1$.

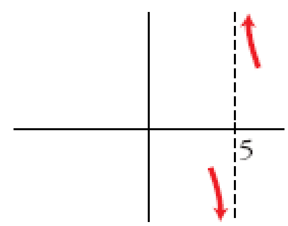
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$



b) $y = \dfrac{x}{x-5}$

No definida en $x = 5$.

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$

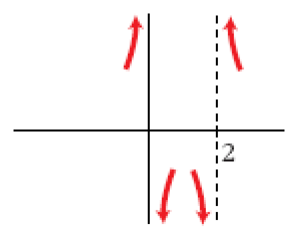


c) $y = \dfrac{1}{x^2-2x}$

$x^2 - 2x = x(x-2)$. No definida en $x = 0$ y en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

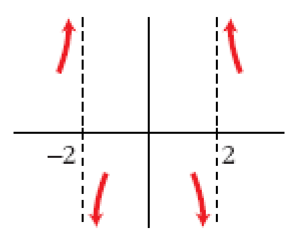


d) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$

No definida en $x = 2$ y en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



10.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3^{x^2+1}$

b) $y = 5^{\sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

d) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

e) $y = \sqrt{sen\ x}$

f) $y = cos^3(2x+1)$

Solución

a) $y' = 3^{x^2+1} \cdot 2x \cdot \ln 3$

b) $y' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 5$

c) $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

d) $y' = \dfrac{\ln x - x \cdot 1/x}{(\ln x)^2} = \dfrac{(\ln x) - 1}{\ln^2 x}$

e) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\ x}} \cdot cos\ x = \dfrac{cos\ x}{2\sqrt{sen\ x}}$

f) $y' = 3\,cos^2(2x+1) \cdot (-sen\ (2x+1)) \cdot 2 = -6\ cos^2\ (2x+1) \cdot sen\,(2x+1)$

11.-

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén su función derivada y estudia su signo. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f? ¿Tiene f máximo o mínimo?

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ x = 1,\ \ x = 3$

$f'(x) > 0 \ \rightarrow\ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \ \rightarrow$ Intervalos de crecimiento.

$f'(x) < 0 \ \rightarrow\ (1, 3) \ \rightarrow$ Intervalo de decrecimiento.

Máximo en (1, 8) y mínimo en (3, 4).

12.-

Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^3 - 18x + 1$.

$f'(x) = 9x^2 - 18 = 9(x^2 - 2)$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{2},\; x = -\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \;\rightarrow\; f(x)$ creciente

$f'(x) < 0 \;\rightarrow\; (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \;\rightarrow\; f(x)$ decreciente

13.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de estas funciones analizando el signo de su derivada:

a) $y = \dfrac{x-3}{5}$

b) $y = x^2 - 5x + 3$

c) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{4}$

d) $y = 1 + 2x - x^2$

e) $y = x^3$

f) $y = (x+1)^4$

g) $y = (2-x)^5$

h) $y = (3-x)^3$

Solución

a) $y' = \dfrac{1}{5}$. Creciente para todo x.

b) $y' = 2x - 5$. Decrece en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$. Crece en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

c) $y' = \dfrac{3x-1}{2}$. Decrece en $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$. Crece en $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

d) $y' = 2 - 2x$. Crece en $(-\infty, 1)$. Decrece en $(1, +\infty)$.

e) $y' = 3x^2$. Creciente para todo $x \neq 0$.

f) $y' = 4(x+1)^3$. Decrece en $(-\infty, -1)$. Crece en $(-1, +\infty)$.

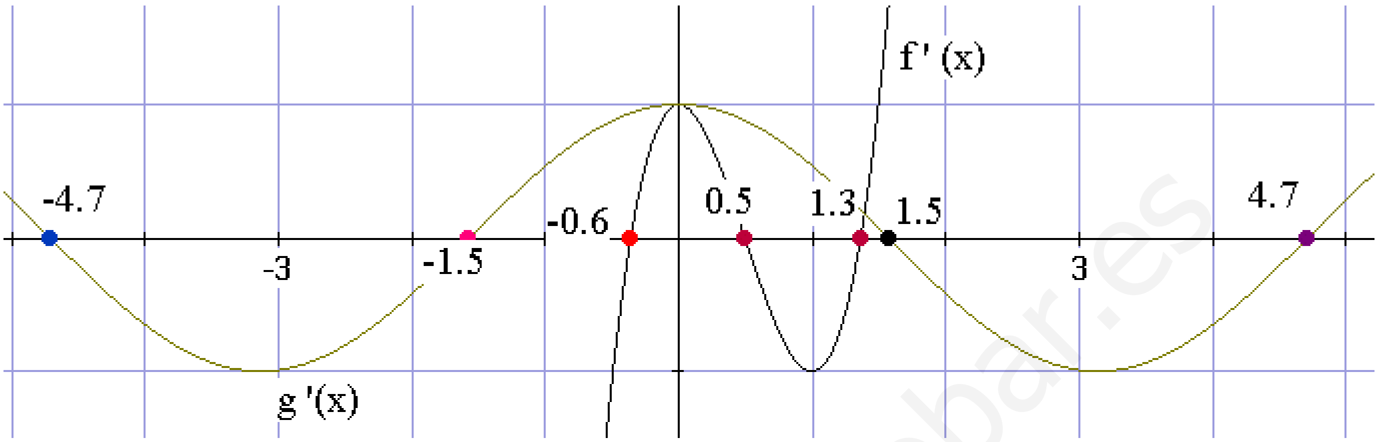
g) $y' = -5(2-x)^4$. Decreciente para todo $x \neq 2$.

h) $y' = 3(3-x)^2 \cdot (-1) = -3(3-x)^2$; $y' < 0$ para $x \neq 3$; $y' = 0$ en $x = 3$.

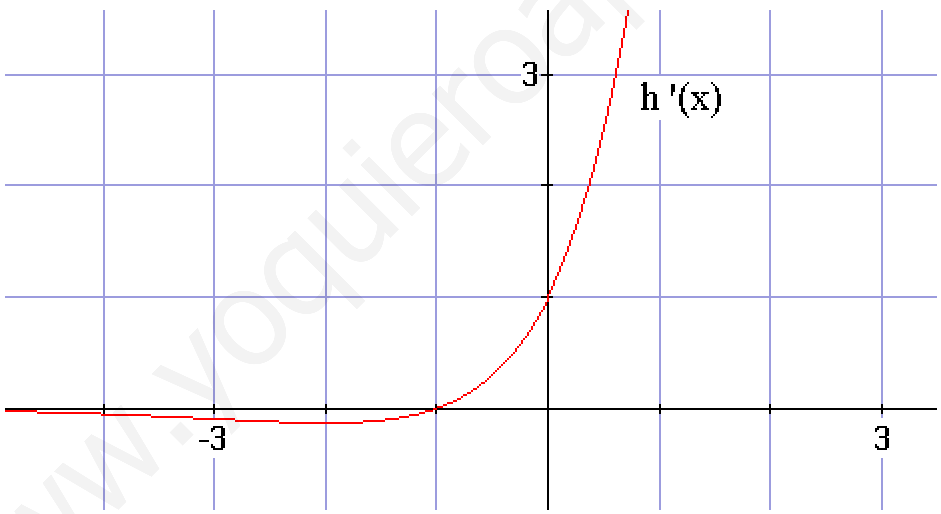
La función es decreciente.

14.-

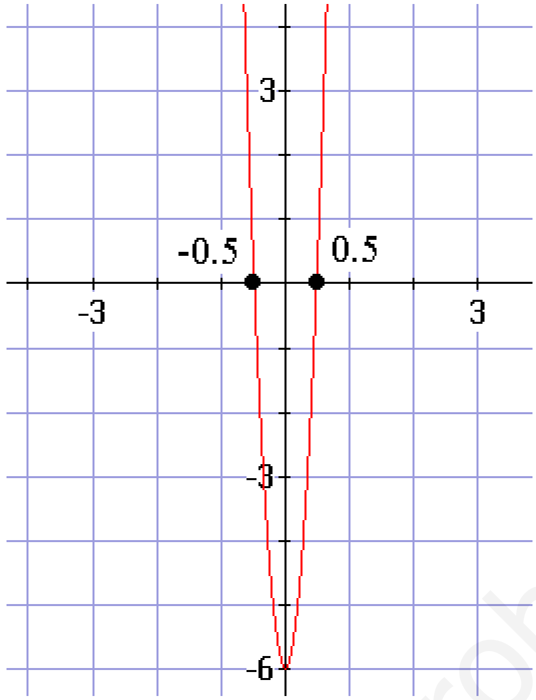
1. Las siguientes gráficas representan dos funciones: f ‘(x), función derivada de una función f(x), y g ‘(x), función derivada de una función g(x). Las funciones f(x) y g(x) no aparecen en el dibujo. Se pide estudiar el crecimiento y los extremos relativos de las funciones f(x) y g(x).



2. En la siguiente gráfica aparece representada la función h ‘(x), derivada de h(x). Estudia la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de h(x). ¿En qué intervalos es positiva h’’(x),la segunda derivada de h(x)? ¿En cuáles es negativa? ¿Se puede saber si la función h(x) tiene puntos de inflexión?



3. La siguiente función es la representación gráfica de la segunda derivada de una función f(x). ¿Qué se puede averiguar sobre la concavidad y la convexidad. ¿Tiene la función f(x) puntos de inflexión? Responde a todas las preguntas razonadamente



15.-

Estudia la curvatura de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2$
b) $y = 3x - x^3 - 2$
c) $y = -x^4 + 2x^2$

Podeis mirar los ejercicios siguientes de vuestro libro:

Pag 255………………..6.Actividades 1 y 2

Pag 259………………..Ejercicio 7