Definición de derivada

Ejercicio nº 1.-

Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo [1, 2] e indica

$$f(x) = 2x^2 - 3x$$

Ejercicio nº 2.-

Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x-1}{3}$.

Ejercicio nº 3.-

Utilizando la definición de derivada, calcula *f´(x)* para la función $f(x) = \frac{x+1}{3}$.

Ejercicio nº 4.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$

b) $f(x) = e^x$

Ejercicio nº 5.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$

b) $f(x) = xe^x$

Ejercicio nº 6.-

Calcula la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt{4x^3+1}$$

Ejercicio nº 7.-

Consideramos la función:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2}$$

Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si *f(x)* crece o decrece en ese intervalo.

Ejercicio nº 8.-

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3, -1]$

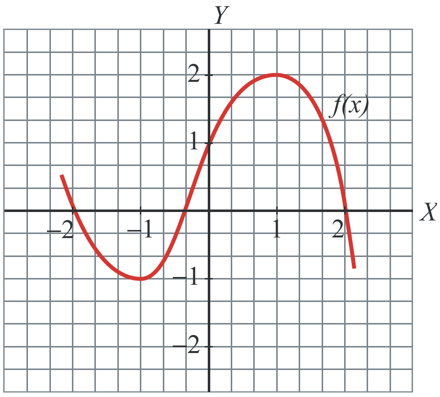
b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

Ejercicio nº 9.-

Calcula la tasa de variación media de esta función, *f(x)*, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:

a) $[-1, 0]$

b) $[1, 2]$



Ejercicio nº 10.-

Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(-1)$**, siendo** $f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$**.**

Ejercicio nº 11.-

Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$**, siendo** $f(x) = \dfrac{2}{x}$**.**

Ejercicio nº 12.-

Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ **para la función** $f(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

Ejercicio nº 13.-

Halla la derivada de la función $f(x) = (x-1)^2$ **en** $x = 2$**, aplicando la definición de derivada.**

Ejercicio nº 14.-

Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$**, aplicando la definición de derivada:**

$$f(x) = x^2 + 1$$

Ejercicio nº 15.-

Halla la derivada de la función $f(x) = 2x^2$**, aplicando la definición de derivada**

Ejercicio nº 16.-

Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(x)$ **para la función** $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

Ejercicio nº 17.-

Halla $f'(x)$**, aplicando la definición de derivada, siendo** $f(x) = x^2 + 1$**.**

Ejercicio nº 18.-

Aplicando la definición de derivada calcula $f'(x)$, siendo $f(x) = \frac{1}{x}$.

Cálculo de derivadas

Ejercicio nº 19.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$
b) $f(x) = tg\ x$

Ejercicio nº 20.-

Calcula la función derivada de:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$
b) $f(x) = lnx$

Ejercicio nº 21.-

Halla la derivada de:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{5}$
b) $f(x) = cos\,x$

Ejercicio nº 22.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^5 + \frac{x}{3}$
b) $f(x) = sen\,x$

Ejercicio nº 23.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$
b) $f(x) = e^x$

Ejercicio nº 24.-

Calcula $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{2x + 3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot sen\,x$

Ejercicio nº 25.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-3}$

b) $f(x)=x\ln x$

Ejercicio nº 26.-

Calcula la derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-2}$

b) $f(x)=x^2 \operatorname{sen} x$

Ejercicio nº 27.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x+1}$

b) $f(x)=xe^x$

Ejercicio nº 28.-

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{3x+1}{e^x}$

Ejercicio nº 29.-

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{3x+1}{e^x}$

Ejercicio nº 30.-

Calcula la derivada de la función:

$$f(x)=\sqrt{4x^3+1}$$

Ejercicio nº 31.-

Halla la función derivada de:

$$f(x)=\left(3x^2+x\right)^4$$

Ejercicio nº 32.-

Halla *f´(x)* para la función:

$$f(x) = e^{4x^3 - 2x}$$

Ejercicio nº 33.-

Calcula la función derivada de:

$$f(x) = sen\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

Aplicaciones de la derivada

Ejercicio nº 34.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x$ que tenga pendiente -7.

Ejercicio nº 35.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ que sea paralela a la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$

Ejercicio nº36.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio nº 37.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio nº 38.-

Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

Ejercicio nº 39.-

Averigua los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$$

Ejercicio nº 40.-

Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

Ejercicio nº 41.-

Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

Ejercicio nº 42.-

Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

Ejercicio nº 43.-

Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

Ejercicio nº 44.-

Dada la función:

$$f(x) = 2x^3$$

determina los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Ejercicio nº 45.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Ejercicio nº 46.-

Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$f(x) = 3 + 12x - 3x^2$$

Ejercicio nº 47.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}$$

Ejercicio nº 48.-

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$f(x) = (x+2)^2$$

SOLUCIONES
Definición de derivada

Ejercicio nº 1.-

Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo [1, 2] e indica

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 3x}$$

Solución:

$$\text{T.V.M.}[1,\ 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{2-(-1)}{1} = \frac{(2+1)}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en el intervalo [1, 2].

Ejercicio nº 2.-

Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x-1}{3}$.

Solución:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1+h-1}{3} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio nº 3.-

Utilizando la definición de derivada, calcula *f´(x)* para la función $f(x) = \frac{x+1}{3}$.

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1}{3} - \frac{(x+1)}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio nº 4.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x)=3x^4-2x+5$
b) $f(x)=e^x$

Solución:

a) $f'(x)=12x^3-2$
b) $f'(x)=e^x$

Ejercicio nº 5.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x+1}$
b) $f(x)=xe^x$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{2x(2x+1)-(x^2+2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$

b) $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

Ejercicio nº 6.-

Calcula la derivada de la función:

$$f(x)=\sqrt{4x^3+1}$$

Solución:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x^3+1}}\cdot 12x^2=\frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3+1}}=\frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}$$

Ejercicio nº 7.-

Consideramos la función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2}$$

Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si *f(x)* crece o decrece en ese intervalo.

Solución:

$$\text{T.V.M.}\left[0,\ 2\right]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función crece en ese intervalo.

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{3}{x}$ en el intervalo [–3,–1]

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

Solución:

a) $\text{T.V.M.}\left[-3,\ -1\right]=\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\frac{-3-(-1)}{-1+3}=\frac{-3+1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

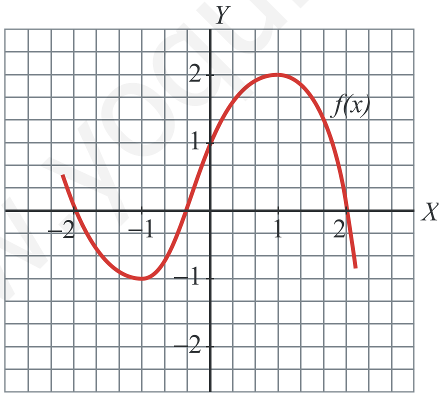
b) Como la tasa de variación media es negativa, la función es decreciente en el intervalo dado.

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Calcula la tasa de variación media de esta función, *f(x)*, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:

a) $\left[-1,\ 0\right]$

b) $\left[1,\ 2\right]$



Solución:

a) $\text{T.V.M.}\left[-1,\ 0\right]=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{1-(-1)}{1}=\frac{1+1}{1}=2$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en [-1,0]. (También se puede apreciar directamente en la gráfica).

b) $\text{T.V.M.}\left[1,\ 2\right]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{0-2}{1}=-2$

La función decrece en este intervalo.

Ejercicio nº 10.-

Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(-1)$, siendo $f(x)=\frac{3x+1}{2}$.

Solución:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(-1+h)+1}{2}-\frac{-2}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3+3h+1}{2}+\frac{2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3+3h+1+2}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3h}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{2h}=\frac{3}{2}$$

Ejercicio nº 11.-

Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x)=\frac{2}{x}$.

Solución:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{1+h}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2(1+h)}{(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2-2h}{(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2h}{(1+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{(1+h)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{(1+h)}=\frac{-2}{1}=-2$$

Ejercicio nº 12.-

Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x)=\frac{x-1}{3}$.

Solución:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1+h-1}{3}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio nº 13.-

Halla la derivada de la función $f(x)=(x-1)^2$ en $x=2$, aplicando la definición de derivada.

Solución:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h-1)^2-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+1+2h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2)=2$$

Ejercicio nº 14.-

Halla la derivada de la siguiente función en *x* = 1, aplicando la definición de derivada:

$$f(x)=x^2+1$$

Solución:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+1-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+h^2+2h+1-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(h+2)=2$$

Ejercicio nº 15.-

Halla la derivada de la función $f(x)=2x^2$, aplicando la definición de derivada

Solución:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-2x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^2+h^2+2xh)-2x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2h^2+4xh-2x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+4xh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2h+4x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+4x)=4x$$

Ejercicio nº 16.-

Utilizando la definición de derivada, calcula *f´(x)* para la función $f(x)=\frac{x+1}{3}$.

Solución:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1}{3}-\frac{(x+1)}{3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{3h}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio nº 17.-

Halla *f´(x)*, aplicando la definición de derivada, siendo $f(x)=x^2+1$.

Solución:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-\left(x^2+1\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh+1-x^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

Ejercicio nº 18.-

Aplicando la definición de derivada calcula $f'(x)$, siendo $f(x)=\frac{1}{x}$.

Solución:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

Cálculo de derivadas

Ejercicio nº 19.-

Halla la función derivada de:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$
b) $f(x) = tg\ x$

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x$

b) $f'(x) = 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{cos^2 x}$

Ejercicio nº 20.-

Calcula la función derivada de:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$
b) $f(x) = lnx$

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 2x$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Ejercicio nº 21.-

Halla la derivada de:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + \dfrac{1}{5}$

b) $f(x) = cos\ x$

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$
b) $f'(x) = -sen\ x$

Ejercicio nº 22.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^5 + \dfrac{x}{3}$

b) $f(x) = sen\ x$

Solución:

a) $f'(x) = 10x^4 + \frac{1}{3}$

b) $f'(x) = \cos x$

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

Halla la función derivada de:

a) $\boldsymbol{f(x) = 3x^4 - 2x + 5}$

b) $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Solución:

a) $f'(x) = 12x^3 - 2$

b) $f'(x) = e^x$

<u>Ejercicio nº 24.-</u>

Calcula *f´(x)* en cada caso:

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x^2}{2x+3}}$

b) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sen} x}$

Solución:

a) $f'(x) = \frac{6x(2x+3) - 3x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{12x^2 + 18x - 6x^2}{(2x+3)^2} = \frac{6x^2 + 18x}{(2x+3)^2}$

b) $f'(x) = x^{1/3} \cdot \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \operatorname{sen} x + x^{1/3} \cdot \cos x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

<u>Ejercicio nº 25.-</u>

Halla la función derivada de:

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 3}}$

b) $\boldsymbol{f(x) = x \ln x}$

Solución:

a) $f'(x) = \frac{-2x(x-3) - (1 - x^2)}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 1 + x^2}{(x-3)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2}$

b) $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

Ejercicio nº 26.-

Calcula la derivada de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-2}}$

b) $\boldsymbol{f(x)=x^2 sen\, x}$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{3(x^2-2)-(3x-1)2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{3x^2-6-6x^2+2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{-3x^2+2x-6}{(x^2-2)^2}$

b) $f'(x)=2x\ \ senx+x^2\cos x$

Ejercicio nº 27.-

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x+1}}$

b) $\boldsymbol{f(x)=xe^x}$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{2x(2x+1)-(x^2+2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$

b) $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

Ejercicio nº 28.-

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}}$

b) $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{3x+1}{e^x}}$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{3e^x-(3x+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2}=\dfrac{2-3x}{e^x}$

Ejercicio nº 29.-

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}}$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+1}{e^x}}$

Solución:

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{3e^x - (3x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2} = \frac{2-3x}{e^x}$

Ejercicio nº 30.-

Calcula la derivada de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{4x^3+1}}$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3+1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3+1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}$$

Ejercicio nº 31.-

Halla la función derivada de:

$$\boldsymbol{f(x) = (3x^2+x)^4}$$

Solución:

$f'(x) = 4(3x^2+x)^3 \cdot (6x+1)$

Ejercicio nº 32.-

Halla ***f´(x)*** **para la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = e^{4x^3-2x}}$$

Solución:

$f'(x) = e^{4x^3-2x} \cdot (12x^2-2)$

Ejercicio nº 33.-

Calcula la función derivada de:

$$f(x) = sen\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

Solución:

$$f'(x) = cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)\cdot\frac{(2x-3)-(x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2}\cdot cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) =$$

$$= \frac{-5}{(2x-3)^2}\cdot cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

Aplicaciones de la derivada

Ejercicio nº 34.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x$ que tenga pendiente -7.

Solución:

- $y' = 4x - 3$
- La pendiente de la recta es $y' = -7 \quad \Rightarrow \quad 4x - 3 = -7 \Rightarrow x = -1$
- Cuando $x = -1$, $y = 5$.
- La recta será:

$$y = 5 - 7(x+1) = 5 - 7x - 7 = -7x - 2$$

Ejercicio nº 35.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ que sea paralela a la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$

Solución:

- $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- La pendiente de la recta es $y' = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = 4$
- Cuando $x = 4$, $y = 2$
- La recta será:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = 2 + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{1}{4}x + 1$$

Ejercicio nº36.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- $y' = 2x + 2$
- La pendiente de la recta es $y'(1) = 4$.
- Cuando $x = 1$, $y = 2$
- La recta será:

$$y = 2 + 4(x-1) = 2 + 4x - 4 = 4x - 2$$

Ejercicio nº 37.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- $y' = 3x^2 - 2$
- La pendiente de la recta es $y'(2) = 10$.
- Cuando $x = 2$, $y = 4$.
- La ecuación de la recta será:

$$y = 4 + 10(x-2) = 4 + 10x - 20 = 10x - 16$$

Ejercicio nº 38.-

Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

Solución:

- $y' = 6x + 1$
- La pendiente de la recta es $y' = 7 \quad \Rightarrow \quad 6x + 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 1$
- Cuando dos $x = 1$, $y = 3$.
- La ecuación de la recta será:

$$y = 3 + 7(x-1) = 3 + 7x - 7 = 7x - 4$$

Ejercicio nº 39.-

Averigua los puntos de tangente horizontal de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{-2x(x+2) - (3 - x^2)}{(x+2)^2} = \dfrac{-2x^2 - 4x - 3 + x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$
- $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -1 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-1,\ 2) \\ x = -3 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-3,\ 6) \end{cases}$$

Ejercicio nº 40.-

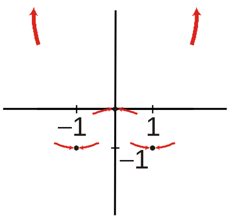
Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^2}$$

Solución:

- $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (-1, -1) \\ x = 0 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (0, 0) \\ x = 1 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (1, -1) \end{cases}$
- Hallamos las ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty$$



Mínimo en $(-1, -1)$ y en $(1, -1)$; máximo en $(0, 0)$

Ejercicio nº 41.-

Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x + 2}}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$
- $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3 + 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(2x + 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow & \text{Punto}(0, 0) \\ x = -3 \rightarrow & \text{Punto}(-3, 27) \end{cases}$

Ejercicio nº 42.-

Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:

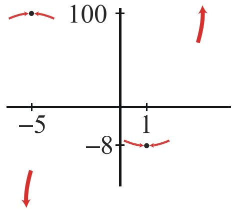
$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x}$$

Solución:

- $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2};\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}\begin{cases} x=1 \ \rightarrow \quad \text{Punto}(1,-8) \\ x=-5 \rightarrow \quad \text{Punto}(-5,100) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+6x^2-15x\right)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+6x^2-15x\right)=-\infty$



Máximo en (–5, 100) y mínimo en (1, – 8).

Ejercicio nº 43.-

Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:

$$\boldsymbol{y=x^3-3x^2-9x+1}$$

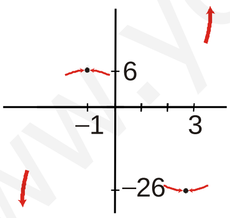
Solución:

- $y'=3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=$

$$=\frac{2\pm 4}{2}\quad \begin{matrix} x=3 \ \rightarrow \quad \text{Punto}\ (3,-26) \\ x=-1\rightarrow \quad \text{Punto}\ (-1,\ 6) \end{matrix}$$

- Hallamos las ramas infinitas para saber si son máximos o mínimos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2-9x+1\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2-9x+1\right)=-\infty$$



Máximo en (–1, 6) y mínimo en (3, –26).

Ejercicio nº 44.-

Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)=2x^3}$$

determina los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

- $f'(x) = 6x^2$
- Como $f'(x) \geq 0$ la función es creciente

<u>Ejercicio nº 45.-</u>

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2x + 1}$$

Solución:

- $f'(x) = 6x - 2$
- Estudiamos el signo de la derivada:

  $6x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}$

  $6x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x > 2 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{2}{6} \Rightarrow x > \dfrac{1}{3}$

  $6x - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 2 \quad \Rightarrow \quad x < \dfrac{1}{3}$

- La función decrece en $\left(-\infty, \ \dfrac{1}{3}\right)$, crece en $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$ $\left(\text{y tiene un mínimo en } x = \dfrac{1}{3}\right)$.

<u>Ejercicio nº 46.-</u>

Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 3 + 12x - 3x^2}$$

Solución:

- $f'(x) = 12 - 6x$
- Estudiamos el signo de la derivada:

  $12 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

  $12 - 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad 12 > 6x \quad \Rightarrow \quad 6x < 12 \quad \Rightarrow \quad x < 2$

  $12 - 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad 12 < 6x \quad \Rightarrow \quad 6x > 12 \quad \Rightarrow \quad x > 2$

- La función es creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2 +\infty)$ (y tiene un máximo en $x = 2$).

<u>Ejercicio nº 47.-</u>

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{2x - 3}{2}$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$\frac{2x-3}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad 2x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{2}$$
$$\frac{2x-3}{2}>0 \quad\Rightarrow\quad 2x-3>0 \quad\Rightarrow\quad 2x>3 \quad\Rightarrow\quad x>\frac{3}{2}$$
$$\frac{2x-3}{2}<0 \quad\Rightarrow\quad 2x-3<0 \quad\Rightarrow\quad 2x<3 \quad\Rightarrow\quad x<\frac{3}{2}$$

- La función decrece en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ $\left(\text{y tiene un mínimo en } x=\frac{3}{2}\right)$.

Ejercicio nº 48.-

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$\boldsymbol{f(x)=(x+2)^2}$$

Solución:

- $f'(x)=2(x+2)$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$2(x+2)=0 \quad\Rightarrow\quad x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2$$
$$2(x+2)>0 \quad\Rightarrow\quad x+2>0 \quad\Rightarrow\quad x>-2$$
$$2(x+2)<0 \quad\Rightarrow\quad x+2<0 \quad\Rightarrow\quad x<-2$$

- La función decrece en $(-\infty, -2)$ y crece en $(-2, +\infty)$ (y tiene un mínimo en $x = 2$).