APLICACIONES DE LA DERIVADA CCSS

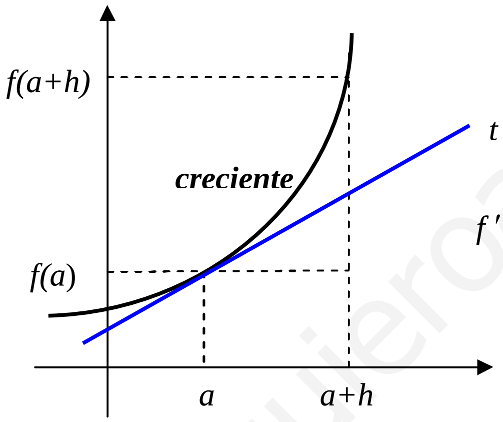
Crecimiento y decrecimiento.

Cuando una función es derivable en un punto, podemos conocer si es creciente o decreciente en dicho punto:

☞ **Una función *f(x)* es creciente en un punto *a*, si su derivada es positiva**
☞ **Una función *f(x)* es decreciente en un punto *a*, si su derivada es negativa.**
Es decir,

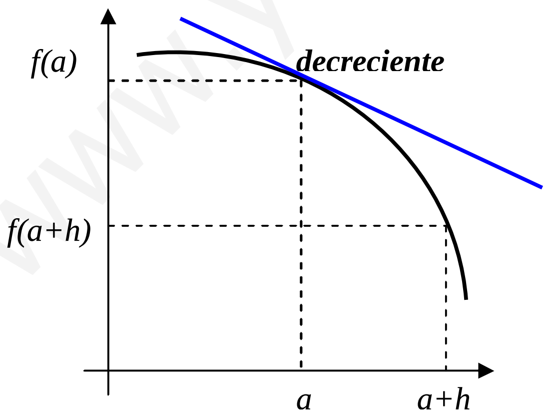
Si $f'(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es creciente en $x = a$

Si $f'(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es decreciente en $x = a$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

Como $f(a+h) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a)$, es decir, la función es creciente en $x = a$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$$

En este caso $f(a+h) - f(a) < 0 \Rightarrow f(a+h) < f(a)$, la función es decreciente en $x = a$

Estudiar la monotonía de una función es hallar los intervalos en los que es creciente y decreciente.

Se procede de la siguiente forma:

- Se halla la derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante
- Con los puntos en los que se anula la derivada y los que no pertenecen al dominio dividimos el dominio en intervalos.
- Se estudia el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

Ejemplo 1.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Hallamos la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

La igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Dividimos el dominio R por los puntos *3* y *1* y obtenemos los intervalos

$$(-\infty,1),\quad (1,3) \quad \text{y} \quad (3,+\infty)$$

Estudiamos el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada intervalo:

Para $x = 0$, $f'(0) = 9$, es decir, positiva

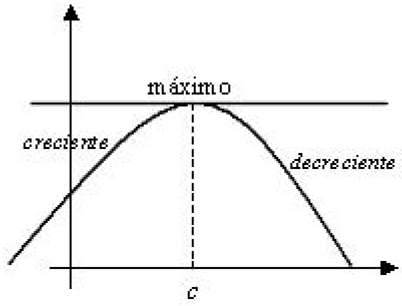
Para $x = 2$, $f'(2) = -3$, es decir, negativa

Para $x = 4$, $f'(4) = 9$, positiva

La monotonía de la función queda reflejada en la siguiente tabla:

Intervalos	(- ∞, 1)	(1, 3)	(3, +∞)
Signo de la derivada	+	-	+
Función	➚	➘	➚

Máximos y mínimos.



Son los puntos en que la función cambia de monotonía.

☞ **Si una función derivable presenta un máximo o un mínimo en un punto** $c \in (a,b)$ **, entonces** $f'(c) = 0$ (condición necesaria)

En el punto de abscisa $x = c$ la función pasa de creciente a decreciente

Geométricamente significa que la tangente en el punto $x = c$ es horizontal

☞ **Si** $f'(c) = 0$ **y existe la segunda derivada, se verifica:**(condición necesaria y suficiente)

Si $f''(c) > 0$ **, hay un mínimo relativo en el punto** ***c***

Si $f''(c) < 0$ **, hay un máximo en dicho punto.**

Para la determinación de máximos y mínimos podemos utilizar los siguientes criterios:

Criterio de la primera derivada:

- Se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Existe máximo relativo en los puntos en que la función pasa de creciente a decreciente.
- Existe mínimo relativo en los puntos en que pasa de decreciente a creciente.

Criterio de la segunda derivada:

- Calculamos la primera derivada, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.
- Hallamos la segunda derivada.
- Las raíces de la ecuación obtenida se sustituyen en la segunda derivada.
- Si el resultado obtenido es positivo existe mínimo y si es negativo máximo.

Ejemplo 2.

Halla los máximos y mínimos de la función $f(x) = 3x - x^3$

Hallamos la 1ª derivada y resolvemos $f'(x) = 0$

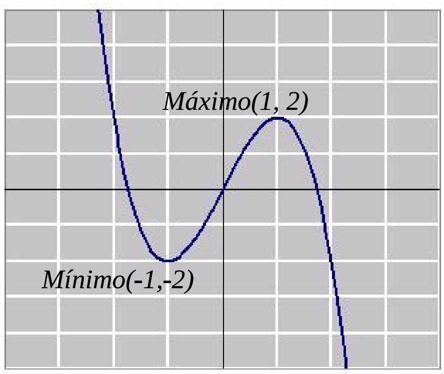
$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hallamos la 2ª derivada y evaluamos en los puntos

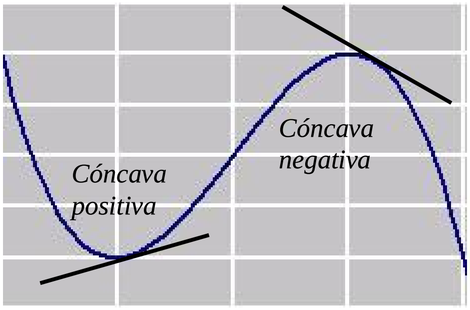
$f''(x) = -6x$

$f''(-1) = -6(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \exists$mínimo para x = *- 1*

$f''(1) = -6.1 = -6 < 0 \Rightarrow \exists$máximo para x = *1*



Curvatura: concavidad positiva y concavidad negativa



Como los conceptos con convexidad y concavidad son relativos, adoptaremos el siguiente criterio:

La función es cóncava positiva en un intervalo si la gráfica de la función queda encima de la recta tangente en un punto cualquiera del intervalo.

La función es cóncava negativa cuando la gráfica queda por debajo.

Puntos de inflexión son aquellos en los que la función cambia de cóncava positiva a cóncava negativa o de cóncava negativa a cóncava positiva.

☞ **Una función derivable es cóncava positiva en un intervalo *(a, b)*, si**

$f''(x) > 0, \ \forall x \in (a, b)$

☞ **Una función derivable es cóncava negativa en un intervalo *(a, b)*, si**

$f''(x) < 0, \ \forall x \in (a, b)$

Estudiar la curvatura de una función consiste en hallar los intervalos en los que es cóncava positiva y negativa.

Se procede de la siguiente forma:

- Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.
- Con los puntos en los que se anula la 2ª derivada y los puntos que no pertenecen al dominio dividimos el dominio en intervalos.
- Se estudia el signo de la 2ª derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

Ejemplo 2.

Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

Primera derivada: $f'(x) = 4x^3 - 12x$

Segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 - 12 \Rightarrow \ 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Dividiendo el dominio R en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$

Estudiamos el signo de $f''(x)$ en un punto cualquiera de cada intervalo:

Para *x* = *-2* $f''(-2) = 12.(-2)^2 - 12 = 36 > 0$

Para *x* = *0*, $f''(0) = -12 < 0$

Para x = 2, $f''(2) = 36 > 0$

Hay puntos de inflexión para *x* = *-1* y para *x* = *1*

Intervalos	(- ∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
Signo de $f''(x)$	+	-	+
Curvatura	∪	∩	∪

Resolución de problemas de optimización.

Son problemas en los que se trata de optimizar una función. Por ejemplo, en una producción obtener los mayores beneficios con los mínimos gastos.

Con los datos del problema hay que construir una función que se ha de maximizar o minimizar dentro de las condiciones exigidas.

Seguiremos los siguientes pasos:

1.- Buscamos la función a optimizar (máximo o mínimo).

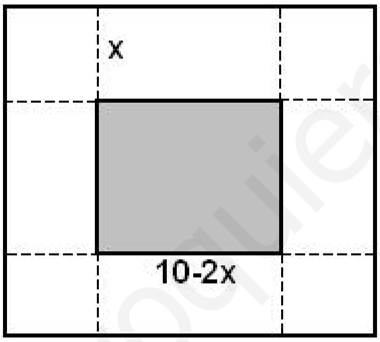
2.- Buscamos la función relacional (si es de más de dos variables).

3.- Despejar de la función relacional una de las variables y sustituirla en la función a optimizar

4.- Hallar el máximo o mínimo de la resultante.

Ejemplo 3.

De una lámina cuadrada de lado 10 cm. se cortan cuadrados en cada uno de los vértices con el objeto de hacer una caja abierta por arriba. Calcula el lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen de la caja sea máximo.



10 cm

1.- Función a maximizar:Volumen de la caja $=(10-2x)(10-2x)x$

$V=(100-40x+4x^2)x$

$V=4x^3-40x^2+100x$ (Función a maximizar)

2 y 3.- como es de dos variables no hace falta la función relacional.

4.- Calculamos su máximo para ello derivamos $V'=12x^2-80x+100$ e igualamos a cero

$$12x^2-80x+100=0 \Rightarrow 3x^2-20x+25=0\,;\ x=\frac{20\pm\sqrt{100}}{6}=\frac{20\pm 10}{6}=\begin{cases}5\\ 5/3\end{cases}$$

Ahora evaluamos la 2ª derivada en estos puntos para determinar si es máximo o mínimo:

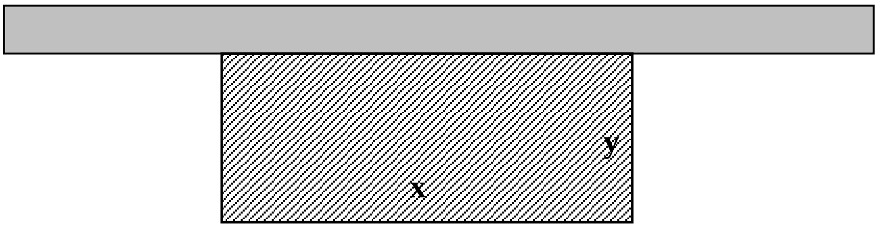
$V''=24x-80$

$V''(5)=24.5-80=40>0$ (mínimo, no se forma caja)

$V''(5/3)=24.5/3-80=-40$ (máximo). La solución es $x=5/3$

Ejemplo 4

Un pastor dispone de 1000 metros de tela metálica para construir un cerco rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones del cerco a fin de el área encerrada sea máxima.



1.- Función a maximizar: Área A= x .y

2.- Función relacional: del perímetro x + 2y = 1000

3.- despejamos x = 1000 – 2y y sustituimos en A, es decir, $A = y(1000 - 2y)$

$A = 1000y - 2y^2$ *(Función a maximizar)*

4.- Hallamos el máximo:

$A' = 1000 - 4y$

$1000 - 4y = 0 \Rightarrow y = 250$

Veamos si es un máximo utilizando el criterio de la 2ª derivada.

Como la segunda derivada $A'' = -4$ es negativa se trata de un máximo.

Hallamos el valor de $x = 1000 - 2y = 1000 - 2 \cdot 250 = 500$

Las dimensiones serán: 500 metros de largo y 250 de ancho.

Ejercicios resueltos.

1.- Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican: *a)* $f(x)=\frac{2}{x}$ *en x = - 1;* *b)* $f(x)=\frac{5x-4}{2x+1}$ *en x = 1*

Solución:

a) $f(x)=\frac{2}{x}=2x^{-1}$; $f'(x)=-2x^{-2}=\frac{-2}{x^2}$

$f'(-1)=\frac{-2}{(-1)^2}=\frac{-2}{1}=-2<0\Rightarrow$ La función es decreciente en x = *-1*

b) $f(x)=\frac{5x-4}{2x+1}$

$$f'(x)=\frac{5(2x+1)-2(5x-4)}{(2x+1)^2}=\frac{10x+5-10x+8}{(2x+1)^2}=\frac{13}{(2x+1)^2}$$

$f'(1)=\frac{13}{(2.1+1)^2}=\frac{13}{9}>0\Rightarrow$ La función es creciente en x = *1*

Obsérvese que en la derivada obtenida el numerador es positivo y el denominador es siempre positivo por estar elevado al cuadrado por lo que la función es creciente no solo en x = *1* sino en todos los puntos de su dominio.

2.- Halla los valores de a y b en la función $f(x)=x^2+ax+b$ sabiendo que pasa por el punto *P(-2, 1)* y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = *-3*

Solución:

Si pasa por el punto *(-2, 1)*, para x = *-2* la función vale *1,* es decir,

$(-2)^2+a(-2)+b=1\Rightarrow -2a+b=-3$

Como tiene un extremo para x = *-3* su derivada se anula en dicho punto, es decir,

$f'(x)=2x+a\Rightarrow 2(-3)+a=0\Rightarrow a=6$

Y sustituyendo en la ecuación $-2a+b=-3$ se obtiene el valor de b

$-12+b=-3\Rightarrow b=9$

3.- Halla *a, b* y *c* en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que el punto *P(0,4)* es un máximo y el punto *Q(2,0)* un mínimo.

Solución:

La función pasa por *(0,4)*, por tanto, $a.0^3+b.0^2+c.0+d=4 \Rightarrow d=4$

La función pasa por *(2,0)*, por tanto, $a.2^3+b.2^2+c.2+d=0$

Luego $8a+4b+2c+d=0$

Por otra parte, el punto *P(0, 4)* es un máximo lo que indica que su derivada se anula para $x=0$, es decir, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f'(0)=3a.0^2+2b.0+c=0 \Rightarrow c=0$

Como el punto *Q(2,0)* es un mínimo, su derivada se anula para $x=2$:

$3a.2^2+2b.2+c=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0$

Formando un sistema con las 4 ecuaciones obtenidas resulta:

$$\begin{cases} d=4 \\ 8a+4b+2c+d=0 \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

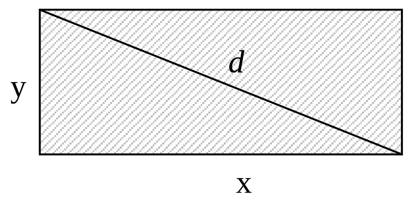
$$\begin{cases} 8a+4b=-4 \\ 12a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a+b=-1 \\ 3a+b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a-b=1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=1;\ \ b=-3$$

4.- Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?.

Solución:



Perímetro: $2x+2y=12 \Rightarrow x+y=6 \Rightarrow y=6-x$ (condición que se ha de cumplir)

Función a minimizar: $x^2+y^2=d^2 \Rightarrow d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(6-x)^2}$

Es decir, $d(x)=\sqrt{2x^2-12x+36}$ que es la función a estudiar.

$$d'(x)=\frac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}=\frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12x+36}}$$

Igualando $d'(x)$ a cero y resolviendo la ecuación resultante se obtiene $x = 3$

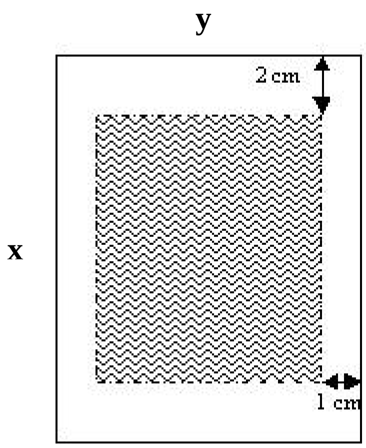
Segunda derivada: $d''(x)=\dfrac{2\sqrt{2x^2-12x+36}-(2x-6)\cdot\dfrac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}}{2x^2-12x+36}$

Valor de la segunda derivada para $x = 3$:

$$d''(3)=\frac{2\sqrt{2.3^2-12\cdot3+36}-0}{2.3^2-12\cdot3+36}=\frac{2\sqrt{2.3^2}}{2.3^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}>0$$ (mínimo, se trata de un cuadrado)

5.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución:



Condición que se tiene que dar: 18 cm^2 de texto impreso, es decir, $(x-4)(y-2)=18 \Rightarrow$

$$y-2=\frac{18}{x-4} \Rightarrow y=\frac{10+2x}{x-4}$$

Función a minimizar: Superficie = x·y

$$S=x.y=x.\frac{10+2x}{x-4}=\frac{10x+2x^2}{x-4}\text{, es decir, } S=\frac{10x+2x^2}{x-4}$$

Derivando, $S'=\dfrac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2}$ e igualando a cero ($S'=0$)

$$2x^2-16x-40=0 \Rightarrow x^2-8x-20=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}=\begin{cases}10\\-2\end{cases}$$

La solución negativa no tiene sentido.

Hacemos la 2ª derivada y evaluamos en x=10

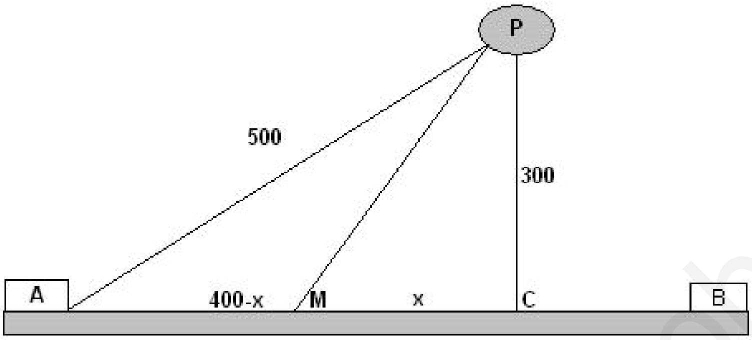
$$S''=\frac{(4x-16)(x-4)^2-2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4}; \quad S''(10)=\frac{24.36-0}{6^4}>0$$

Para x = 10, la 2ª derivada es positiva, luego es un mínimo.

La hoja de papel tiene que ser de 10cm x5 cm.

6.- En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km. De distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km., determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

Solución:



La ruta a seguir es AMP.

Aplicando Pitágoras en el triángulo ACP se obtiene: $\overline{AC} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400$

En el triángulo MCP se obtiene que $\overline{MP} = \sqrt{x^2 + 300^2}$

Y el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia AM + MP es:

$$t = \frac{4 - x}{100} + \frac{\sqrt{x^2 + 300^2}}{60}.$$

Derivando, $t' = \frac{-1}{100} + \frac{1}{60}\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 300^2}} = \frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}}$

Si hacemos $t' = 0$, $\frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}} = \frac{1}{100}$

Es decir, $10x = 6\sqrt{x^2 + 300^2} \Rightarrow 100x^2 = 36x^2 + 36.300^2 \Rightarrow$

$$64x^2 = 36.300^2 \Rightarrow x^2 = \frac{36.300^2}{64} \Rightarrow x = \pm 225$$

La solución negativa no tiene sentido. $AM = 400 - 225 = 175$

El automóvil deja la carretera a 175 Km. de la ciudad A.

Podemos comprobar que es mínimo hallando la segunda derivada:

$$t'' = \frac{1.60\sqrt{x^2 + 300^2} - 60.\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 300^2}}}{60^2(x^2 + 300^2)} = \frac{\frac{60(x^2 + 300^2) - 60x}{\sqrt{x^2 + 300^2}}}{60^2(x^2 + 300^2)} \Rightarrow$$

$t'' = \frac{60(x^2 + 300^2) - 60x}{60^2(x^2 + 300^2)\sqrt{x^2 + 300^2}}$. Para x = 225, $t''(225) > 0$ (mínimo)

Ejercicios propuestos

1.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

2.- Halla los máximos y mínimos de la función $y=\dfrac{x}{\ln x}$

(Solución: mínimo para x = e)

3.- Estudia la curvatura de la función $f(x)=x^4-2x^2$ y determina los puntos de inflexión.

4.- Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x)=2x^3-6x^2+4$ en su punto de inflexión.

(Solución: y = - 6x + 6)

5.- Halla los valores de **b** y **c** para que la curva $y=x^3+bx^2+cx+1$ tenga en el punto (0, 1) una inflexión y la pendiente de la recta tangente en dicho punto valga 1.

(Solución: b = 0; c = 1)

6.- Con un alambre de 4 metros se quiere construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?

7.- Se desea construir un marco rectangular para una ventana de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical es a 30 € el metro. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste de marco sea mínimo.