EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Ejercicio nº 1.-

Calcula $f'(2)$, utilizando la definición de derivada, siendo:

$f(x) = 2x^2 + 5x$

Solución:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2+5(2+h)-18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+4h+h^2)+10+5h-18}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8+8h+2h^2+10+5h-18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+13h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2h+13)}{h} = \lim_{h\to 0} (2h+13) = 13$$

Ejercicio nº 2.-

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.

Solución:

- Si son paralelas a la recta $y = 10x + 2$, tienen la misma pendiente; es decir, ha de ser:

  $f'(x) = 10$

  $$f'(x) = 12x^2 - 2 = 10 \;\rightarrow\; 12x^2 = 12 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

- Ordenadas en los puntos:

  $f(-1) = -1$; $f(1) = 3$

- Ecuaciones de las rectas tangentes:

  - En $x = -1 \;\rightarrow\; y = -1 + 10(x+1) \;\rightarrow\; y = 10x + 9$

  - En $x = 1 \;\rightarrow\; y = 3 + 10(x-1) \;\rightarrow\; y = 10x - 7$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Considera la función:

$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6(x^2 + 3x + 2) = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

• Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
$\nearrow$	-2	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$; es decreciente en $(-2, -1)$. Tiene un máximo en $(-2, -3)$ y un mínimo en $(-1, -4)$.

b) $f''(x) = 12x + 18$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x + 18 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$$

• Signo de $f''(x)$:

$f'' < 0$		$f'' > 0$
$\frown$	$\frac{-3}{2}$	$\smile$

$f(x)$ es cóncava en $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$; es convexa en $\left(\frac{-3}{2}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-7}{2}\right)$.

Ejercicio nº 4.-

Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$f(x) = (x - 2)^2 (x + 1)$

Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Solución:

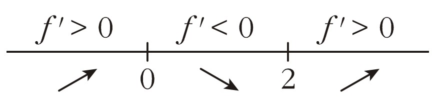
- Derivada:

$f'(x) = 2(x - 2)(x + 1) + (x - 2)^2 = (x - 2)[2(x + 1) + x - 2] =$

$= (x - 2)(2x + 2 + x - 2) = 3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$:



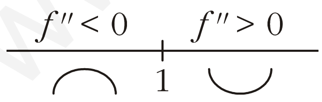
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 2)$. Tiene un máximo en $(0, 4)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

- Segunda derivada:

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

- Signo de $f''(x)$:



$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 1)$; es convexa en $(1, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(1, 2)$.

Ejercicio nº 5.-

Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cual será ese beneficio?

Solución:

Llamamos x al número de céntimos en los que aumenta el precio. Así, cada helado costará $50 + x$ céntimos; y venderá $200 - 2x$ helados diarios.

Por tanto, por la venta de los helados obtendrá unos ingresos:

$$I(x) = (50 + x)(200 - 2x)$$

Pero tiene unos gastos de: $G(x) = (200 - 2x) \cdot 40$

Luego, el beneficio será de:

$$B(x) = I(x) - G(x) = (50 + x)(200 - 2x) - (200 - 2x) \cdot 40 = (200 - 2x)(50 + x - 40) =$$

$$= (200 - 2x)(x + 10) = -2x^2 + 180x + 2\,000$$

Hallamos x para que el beneficio sea máximo:

$$B'(x) = -4x + 180$$

$$B'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x + 180 = 0 \;\rightarrow\; x = 45$$

$$B''(x) = -4; \quad B''(45) < 0 \;\rightarrow\; \text{en } x = 45 \text{ hay un máximo}$$

Por tanto, obtendrá el máximo beneficio vendiendo cada helado a 50 + 45 céntimos de euro. En este caso, el beneficio sería de $B(45) = 6\,050$ céntimos, es decir, de 60,50 euros.

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ en $x_0 = -2$.

Solución:

- Ordenada en el punto:

$$y(-2) = \sqrt{16} = 4$$

- Pendiente de la recta:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x + 6}} \cdot (2x - 3) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 6}}$$

$$y'(-2) = \frac{-7}{8}$$

- Ecuación de la recta:

$$y = 4 - \frac{7}{8}(x + 2) \;\rightarrow\; y = \frac{-7}{8}x + \frac{9}{4}$$

Ejercicio nº 7.-

Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Solución:

- Dominio = **R** – {1}

- Derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$.

$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$	2	$f' > 0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$. Tiene un máximo en $(0, -2)$ y un mínimo en $(2, 2)$.

Ejercicio nº 8.-

Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Solución:

Llamamos x al número de árboles que se plantan. Tenemos que el número de frutos sería:

$$f(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$$

Buscamos x para que $f(x)$ sea máxima:

$$f'(x) = -30x + 240$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -30x + 240 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{240}{30} = 8 \quad \rightarrow \quad x = 8$$

Veamos que es un máximo:

$f''(x) = -30$; $f''(8) = -30 < 0 \quad \rightarrow$ en $x = 8$ hay máximo. (Como $f(x)$ corresponde a una parabola invertida, en $x = 8$ está el máximo absoluto).

Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de $24 + 8 = 32$ árboles, que producirán 15. 360 frutos.

Ejercicio nº 9.-

Halla la derivada de la función $f(x)$, en $x_0 = -1$, utilizando la definición de derivada:

$$f(x)=\frac{4x^2+1}{2}$$

Solución:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(-1+h)^2+1}{2}-\frac{5}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(1-2h+h^2)+1}{2}-\frac{5}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-8h+4h^2+1-5}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h^2-8h}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h(2h-4)}{2h}=\lim_{h\to 0}(2h-4)=-4$$

Ejercicio nº 10.-

Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de abscisas.

Solución:

- Punto de corte con el eje X:

$$y=0 \;\rightarrow\; \frac{x-2}{x+1} \;\rightarrow\; x-2=0 \;\rightarrow\; x=2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2,\,0)$$

- Pendiente de la recta:

$$y'=\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$y'(2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y=\frac{1}{3}(x-2) \;\rightarrow\; y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

Ejercicio nº 11.-

Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{4x-12}{(x-2)^2}}$$

Solución:

- *Dominio* = **R** - { 2 }

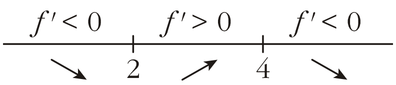
- Derivada:

$$f'(x)=\frac{4(x-2)^2-(4x-12)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(x-2)\,[4(x-2)-2(4x-12)]}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{4x-8-8x+24}{(x-2)^3}=\frac{-4x+16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$

- Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$; es decreciente en $(2, 4)$. Tiene un máximo en el punto $(4, 1)$.

Ejercicio nº 12.-

a) Halla la T.V.M. de la función $\boldsymbol{f(x)=\frac{-x^2+1}{3}}$ en el intervalo $\boldsymbol{[2,\,2+h]}$.

b) Con el resultado obtenido, calcula $\boldsymbol{f'(2)}$.

Solución:

a) $\text{T.V.M.}\,[2,\,2+h]=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{-(2+h)^2+1}{3}-\frac{(-3)}{3}}{h}=\frac{-(4+4h+h^2)+1+3}{3h}=$

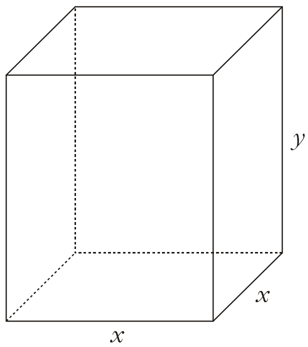
$$=\frac{-4-4h-h^2+4}{3h}=\frac{h(-4-h)}{3h}=\frac{-4-h}{3}$$

b) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(-4-h)}{3}=\frac{-4}{3}$

Ejercicio nº 13.-

Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución:



Llamamos x al lado de la base e y a la altura del depósito. Así, el volumen es:

$$V = x^2 y = 4000 \text{ dm}^3 \quad \to \quad y = \frac{4000}{x^2}$$

La superficie total del depósito (recordemos que está abierto) será:

$$A = 4xy + x^2 = 4x \cdot \frac{4000}{x^2} + x^2 = \frac{16000}{x} + x^2; \quad x > 0$$

Buscamos x para que A sea mínima:

$$A' = \frac{-16000}{x^2} + 2x = \frac{-16000 + 2x^3}{x^2}$$

$$A' = 0 \quad \to \quad -16000 + 2x^3 = 0 \quad \to \quad 2x^3 = 16000 \quad \to$$

$$\to \quad x^3 = \frac{16000}{2} = 8000 \quad \to \quad x = \sqrt[3]{8000} = 20 \text{ dm}$$

Veamos que es un mínimo:

$$A'' = \frac{32000}{x^3} + 2, \quad A''(20) > 0 \quad \to \quad \text{en } x = 20 \text{ hay mínimo}$$

Por tanto, el lado de la base debe medir $x = 20$ dm y la altura, $y = 10$ dm.