

Ejercicio 1.

Resuelve, por el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solución:

Escribimos el sistema en forma de matriz y aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces, el sistema queda: } \begin{cases} 7z = 14 \rightarrow z = 2 \\ -y - 3z = -6 \rightarrow -y - 6 = -6 \rightarrow y = 0 \\ x + y + z = 3 \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x+1}$$

$$b) g(x) = \frac{\ln(4-x^2)}{x}$$

Solución:

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x+1}$$

El dominio de la función es el conjunto de números reales x tales que su imagen $f(x)$ es un número real.

$$\text{Para que } f(x) \text{ sea un número real, debe cumplirse: } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \geq x \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 2] \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Entonces tenemos que } \text{Dom } f(x) = (-\infty, -1) \cup (-1, 2]$$

$$b) g(x) = \frac{\ln(4-x^2)}{x}$$

$$\text{Para que } g(x) \text{ sea un número real, debe cumplirse: } \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2+x)(2-x) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Resolvamos la inecuación $(2+x)(2-x) > 0$

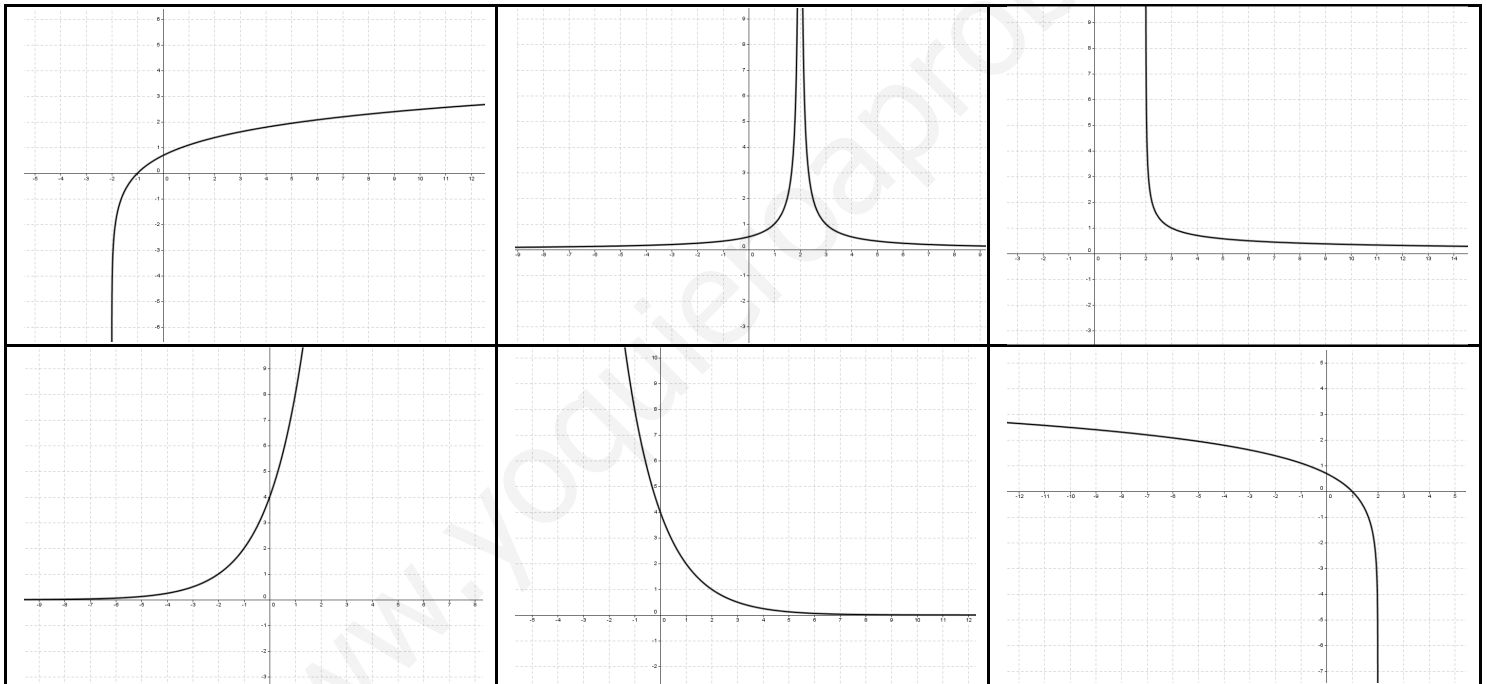
	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$(2+x)$	-	0	+	+	+
$(2-x)$	+	+	+	0	-
$(2+x)(2-x)$	-	0	+	0	-

Entonces, $x \in (-2, 2)$ y además $x \neq 0$, con lo que $Dom g(x) = (-2, 0) \cup (0, 2)$

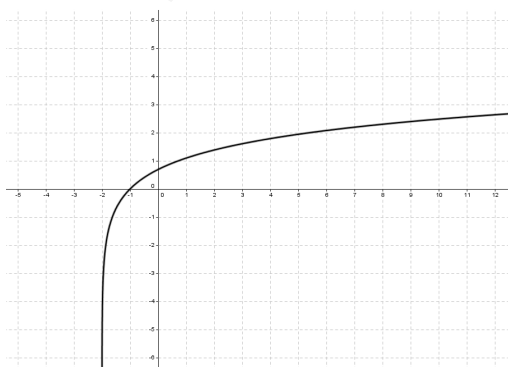
Ejercicio 3.

Asigna a cada una de las siguientes gráficas la expresión correspondiente:

$y = 2^{x+2}$; $y = \ln(2-x)$; $y = \frac{2}{|x-2|}$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$; $y = \ln(x+2)$; $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

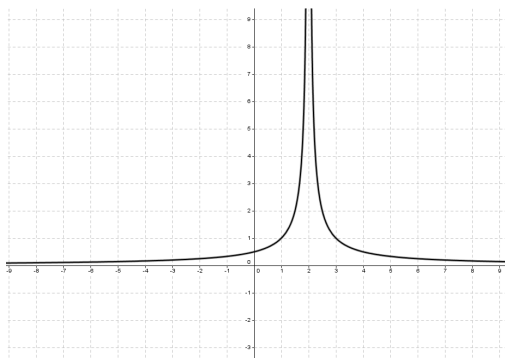


Solución:

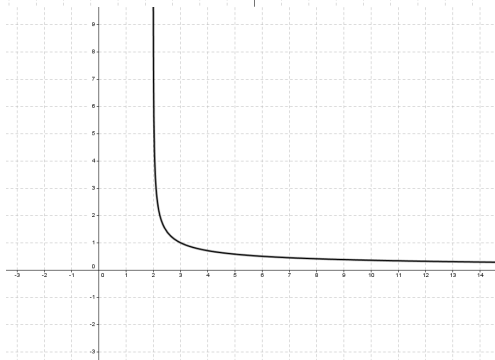


- Es una función con un crecimiento logarítmico.
- Su dominio es $(-2, +\infty)$
- Pasa por el punto $(-1, 0)$
- Esta gráfica se corresponde con la expresión:

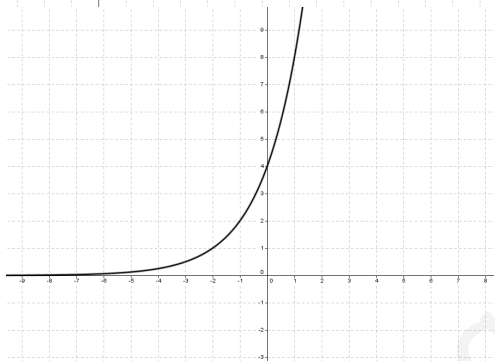
$$f(x) = \ln(x+2)$$



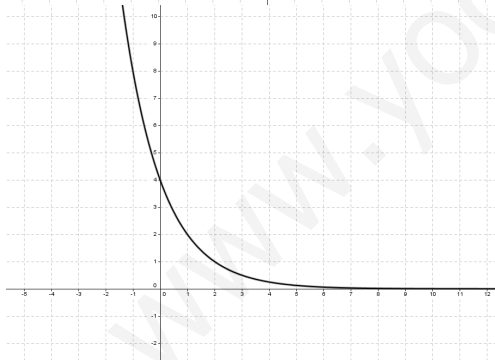
- Es una función siempre positiva.
- Su dominio es $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
- Pasa por los puntos $(1,1)$ y $(3,1)$
- Es una hipérbola en la que las imágenes negativas se han cambiado por sus simétricas con respecto al eje OX.
- Esta gráfica se corresponde con la expresión: $f(x) = \frac{2}{x-2}$



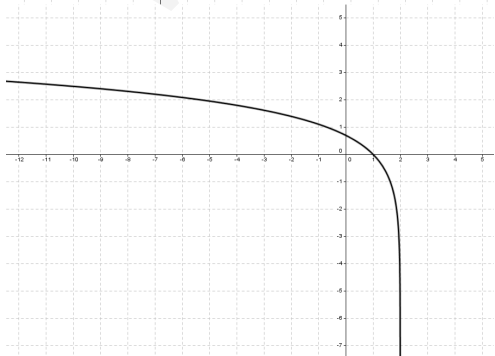
- Es una función siempre positiva.
- Decreciente: cuanto mayor es el valor de x , menores son sus imágenes.
- Su dominio es $(2, +\infty)$
- Pasa por el punto $(3,1)$
- Esta gráfica se corresponde con la expresión: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$



- Es una función siempre positiva.
- Presenta un crecimiento exponencial, de base mayor que 1.
- Su dominio es $(-\infty, +\infty)$
- Pasa por el punto $(0,4)$
- Esta gráfica se corresponde con la expresión: $f(x) = 2^{x+2}$



- Es una función siempre positiva.
- Presenta un decrecimiento exponencial, de base menor que 1.
- Su dominio es $(-\infty, +\infty)$
- Pasa por el punto $(0,4)$
- Esta gráfica se corresponde con la expresión: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$



- Es una función con un aspecto logarítmico.
- Siempre decreciente.
- Su dominio es $(-\infty, 2)$
- Pasa por el punto $(1,0)$
- Esta gráfica se corresponde con la expresión: $f(x) = \ln(2-x)$

Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\log(x-1)+1=\log(x+86)$

b) $2^{x+1}+4^{x-1}=96$

Solución:

$$a) 2\log(x-1)+1=\log(x+86) \Rightarrow \log(x-1)^2+\log 10=\log(x+86) \Rightarrow \log[(x-1)^2 \cdot 10]=\log(x+86) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \cdot 10=x+86 \Rightarrow 10(x^2-2x+1)=x+86 \Rightarrow 10x^2-20x+10-x-86=0$$

$$10x^2-21x-76=0 \Rightarrow x=\frac{21 \pm \sqrt{441+3040}}{20}=\frac{21 \pm 59}{20} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{19}{10} \end{cases} \Rightarrow \text{solución } x=4$$

$$b) 2^{x+1}+4^{x-1}=96 \Rightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{4^x}{4}=96 \Rightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{2^{2x}}{4}=96 \quad (\text{cambio de variable } 2^x=t) \Rightarrow 2t + \frac{t^2}{4}=96$$

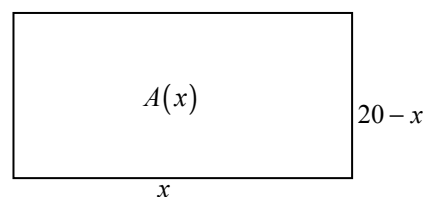
$$t^2+8t-384=0 \Rightarrow t=\frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2-4 \cdot (-384)}}{2}=\frac{-8 \pm \sqrt{1600}}{2}=\frac{-8 \pm 40}{2} \Rightarrow \begin{cases} t=16 \Rightarrow 2^x=16 \Rightarrow x=4 \\ t=-24 \Rightarrow 2^x=-24 \end{cases}$$

solución $x=4$ **Ejercicio 5.**Encuentra la función que define el área de los rectángulos de 40 cm de perímetro, dependiendo de la longitud x de la base. Entre esos rectángulos, calcula las dimensiones del que tiene área máxima.Solución:

En los rectángulos con 40 cm de perímetro, la base y la altura suman 20 cm. Por tanto, si llamamos x a la medida de la base en cm, la altura medirá $(20-x)$.

La función área, que depende del valor de x , vendrá dada por la expresión $A(x)=x \cdot (20-x) \Rightarrow A(x)=20x-x^2$

Esta función área, está definida por una parábola con coeficiente de x^2 negativo, por lo que en su vértice tendrá el máximo.



Dada una parábola $y=ax^2+bx+c$, el vértice se encuentra en el punto (x_0, y_0) , que lo obtenemos así:

$$x_0=-\frac{b}{2a}, y_0=f(x_0) \Rightarrow x_0=-\frac{20}{2 \cdot (-1)}=10, y_0=f(10)=20 \cdot 10-10^2=100 \Rightarrow \text{vértice: } (10,100)$$

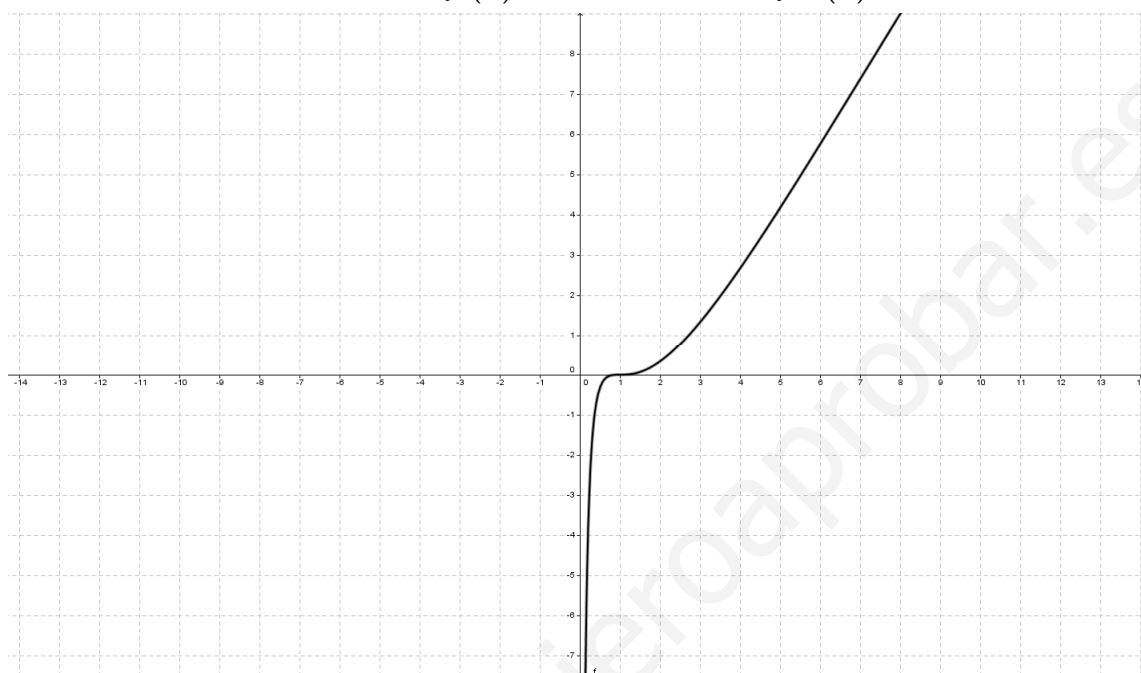
Esto quiere decir que el máximo de la función área lo tenemos para el valor de x (base) 10 cm y nos da un área máxima de 100 cm².

Como no podía ser de otra forma, ese máximo se obtiene cuando el rectángulo es un cuadrado.

Ejercicio 6.

Dada la función $f(x) = (\ln x)^3$, cuya gráfica aparece debajo, se pide:

- Calcula la función inversa de $f(x)$.
- Comprueba, componiendo ambas funciones, que la función obtenida es $f^{-1}(x)$.
- Apoyándote en la gráfica de $f(x)$, esboza la gráfica de $f^{-1}(x)$.

**Solución:**

Calculemos la función inversa de $f(x) = (\ln x)^3$

$$y = (\ln x)^3 \xrightarrow{\text{intercambiamos variables}} x = (\ln y)^3 \xrightarrow{\text{despejamos } y} \sqrt[3]{x} = \ln y \Rightarrow y = e^{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f^{-1}(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$$

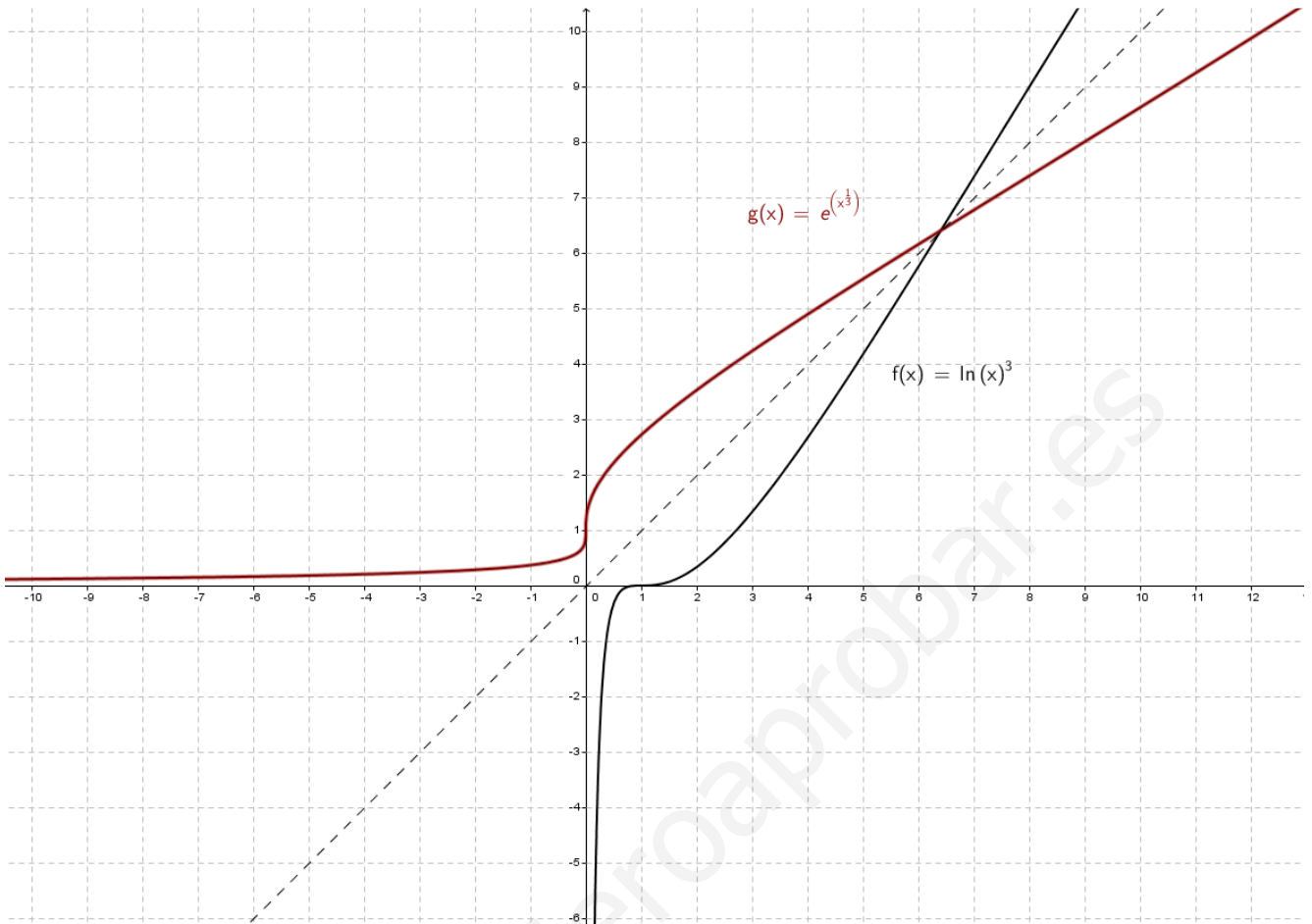
Comprobemos que realmente son funciones inversas, para ello debe cumplirse que $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

$$f^{-1} \circ f : x \xrightarrow{f} f(x) = (\ln x)^3 \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}((\ln x)^3) = e^{\sqrt[3]{(\ln x)^3}} = e^{\ln x} = x \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$f \circ f^{-1} : x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) = e^{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{f} f(e^{\sqrt[3]{x}}) = (\ln e^{\sqrt[3]{x}})^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x \Rightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Dos funciones inversas tienen gráficas simétricas respecto de la bisectriz del 1º y 3º cuadrante, es decir, simétricas respecto de la función identidad $y = x$.

Como nos dan la gráfica de $f(x)$, trazamos la recta $y = x$. Luego buscamos la simetría de $f(x) = (\ln x)^3$ con respecto a esa recta y obtendremos la gráfica de $f^{-1}(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$. Hay que observar que el punto de corte entre $f(x)$ y la recta $y = x$ es invariable por la simetría, es decir, es simétrico de sí mismo.



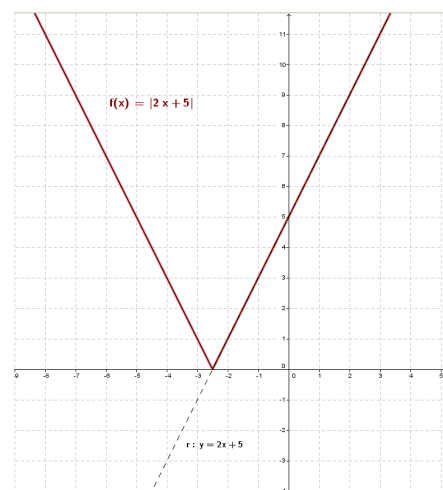
Ejercicio 7.

Representa gráficamente la función e indica si es continua y dónde están sus máximos y mínimos:

$$f(x) = \begin{cases} |2x + 5| & \text{si } x \leq -1 \\ 4 - x^2 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 - 10x + 16 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

Para representar la función $y = |2x + 5|$, obtenemos la gráfica de la recta $y = 2x + 5$, ahora la parte negativa de la función la trasladamos simétricamente con respecto al eje OX. Posteriormente ajustaremos el dominio al intervalo $(-\infty, -1]$



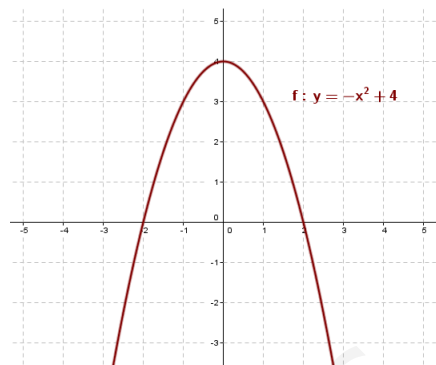
En la parábola $y = 4 - x^2$, analizamos:

Corte con OY: $x = 0 \Rightarrow y = 4$; (0,4)

Cortes con OX: $y = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \begin{cases} x = 2 & (2,0) \\ x = -2 & (-2,0) \end{cases}$

Vértice: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow y_0 = 4$; (0,4)

Luego, restringimos el dominio al intervalo $(-1, 2)$



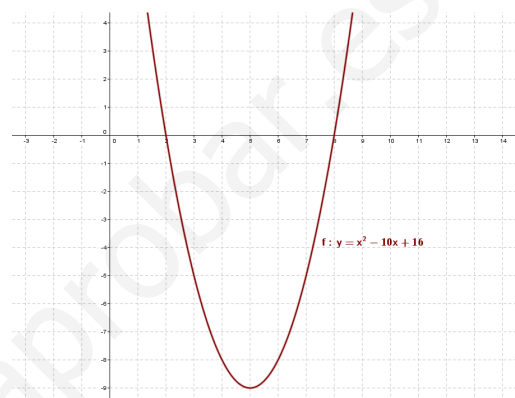
En la parábola $y = x^2 - 10x + 16$, analizamos:

Corte con OY: $x = 0 \Rightarrow y = 16$; (0,16)

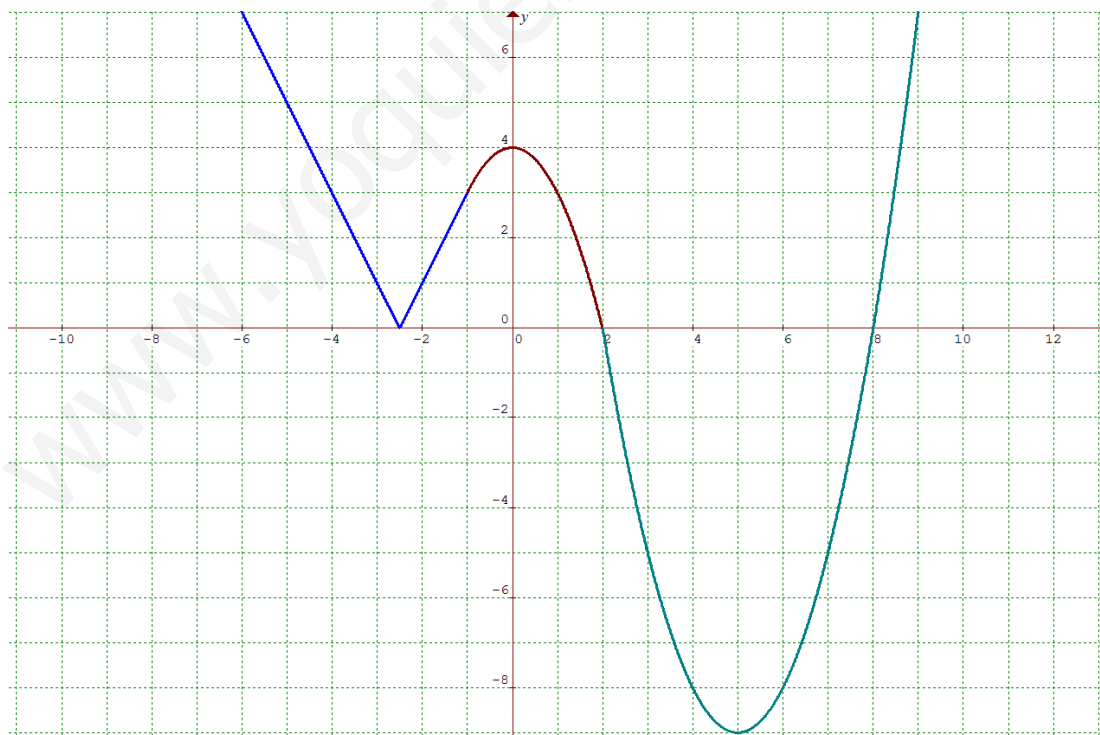
Cortes con OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \begin{cases} x = 2 & (2,0) \\ x = 8 & (8,0) \end{cases}$

Vértice: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 5 \Rightarrow y_0 = -9$; (5,-9)

Luego, restringimos el dominio al intervalo $[2, +\infty)$



Uniendo los trozos, la gráfica quedará:



$f(x)$ es una función continua, con mínimos en los puntos de abscisa $x = -\frac{5}{2}$ y $x = 5$, y máximo en el punto $x = 0$.