

**Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato**

1. Dada la función:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{x} & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \\ -x+1 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 + kx + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Estudiar la continuidad de  $f$  en el punto  $x = -2$ . **(0,5 puntos)**
- b) Hallar el valor de  $k$  para que  $f$  sea continua en  $x = 2$ . **(1 punto)**
- c) Para el valor de  $k$  hallado en el apartado anterior, representa gráficamente la función. **(1 punto)**
2. Dada la función  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ :
- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto  $x = 0$ . **(0,5 puntos)**
- b) Halla los máximos y mínimos relativos, así como los intervalos donde la función crece y decrece. **(1 punto)**
- c) Represéntala gráficamente. **(0,5 puntos)**
3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
- a)  $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$  **(0,5 puntos)**
- b)  $y = \sqrt{2x^3 + x^2 + 1}$  **(0,5 puntos)**
- c)  $y = \frac{\sqrt{1-x}}{4x-1}$  **(1 punto)**
4. Sea la función  $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-4x+3}$ . Calcula:
- a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
- b) Las asíntotas. **(0,5 puntos)**
- c) Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente. Hallar asimismo los máximos y mínimos relativos de la función. **(1,5 puntos)**
- d) Representación gráfica. **(1 punto)**

$$\textcircled{1} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left( \frac{x-4}{x} \right) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x+1) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3 \neq f(-2) = 2 \Rightarrow$$

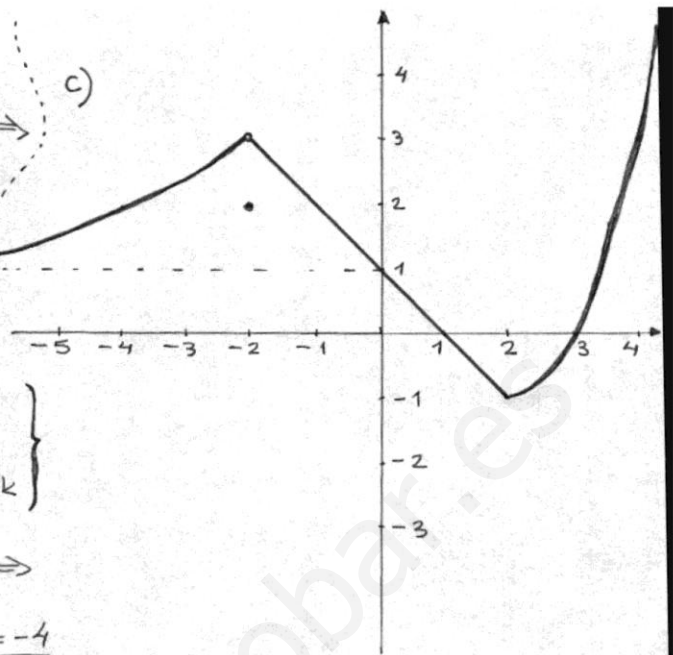
f no es continua en  $x = -2$ ;  
DISCONTINUIDAD EVITABLE

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+kx+3) = 7+2k$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = 7+2k \Rightarrow -8 = 2k \Rightarrow \underline{\underline{k = -4}}$$



$$\textcircled{2} \text{ a) } y - f(0) = f'(0)(x - 0); \quad f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2;$$

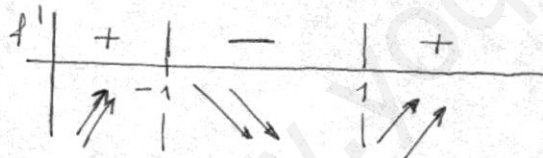
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3. \text{ Entonces la recta}$$

$$\text{tangente en } x = 0 \text{ es: } y - 2 = -3 \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = -3x + 2}}$$

$$\text{b) } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1 \text{ (posibles extremos)}$$

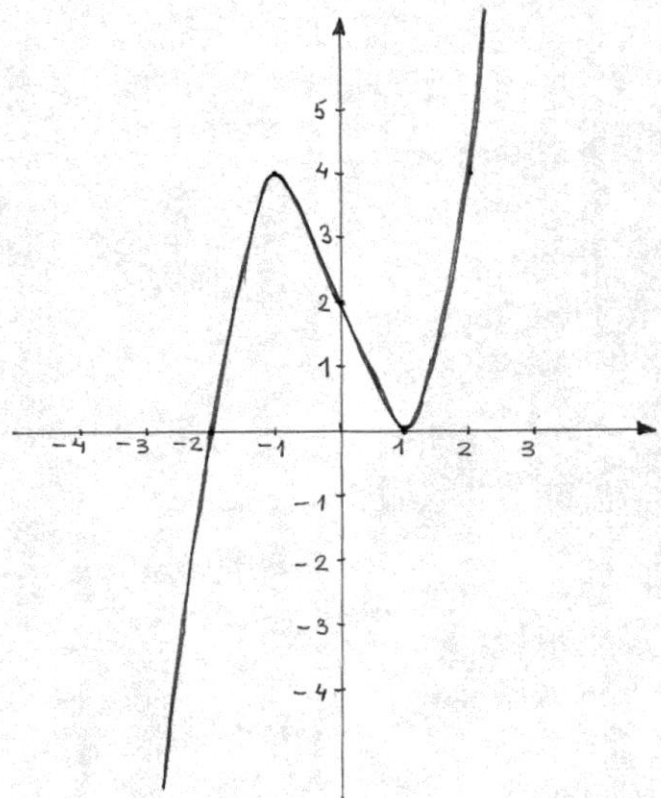
$$f''(x) = 6x; \quad f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1 \text{ es un MÍNIMO RELATIVO: } (1, 0)}}$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = -1 \text{ es un MÁXIMO RELATIVO: } (-1, 4)}}$$



\* f es ESTRICTAMENTE CRECIENTE  
en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

\* f es ESTRICTAMENTE DECRECIENTE  
en  $(-1, 1)$



$$\textcircled{3} \text{ a) } y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3}{x^{1/3}} = x^{3-1/3} = x^{8/3};$$

$$y' = \frac{8}{3} x^{8/3-1} = \frac{8}{3} x^{5/3} = \frac{8 \sqrt[3]{x^5}}{3} = \frac{8 \sqrt[3]{x^2}}{3}$$

$$\text{b) } y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+x^2+1}} \cdot (6x^2+2x) = \frac{6x^2+2x}{2\sqrt{2x^3+x^2+1}} = \frac{3x^2+x}{\sqrt{2x^3+x^2+1}}$$

$$\text{c) } y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1)(4x-1) - \sqrt{1-x} \cdot 4}{(4x-1)^2} = \frac{\frac{-4x+1}{2\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{1-x}}{(4x-1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{-4x+1-8(1-x)}{2\sqrt{1-x}}}{(4x-1)^2} = \frac{4x-7}{2\sqrt{1-x}(4x-1)^2}$$

$$\textcircled{4} \text{ a) } x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1; x=3$$

$$\Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

$$y=0 \Rightarrow 4x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow (\frac{3}{4}, 0)$  punto de corte con el eje X.

$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0, -1)$  punto de corte con el eje Y.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow x=1, x=3$$

ASÍNTOTAS VERTICALES

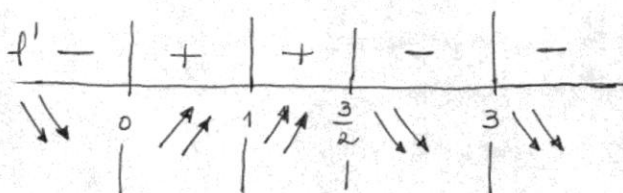
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{x^2-4x+3} = 0 \Rightarrow y=0$$

ASÍNTOTA HORIZONTAL

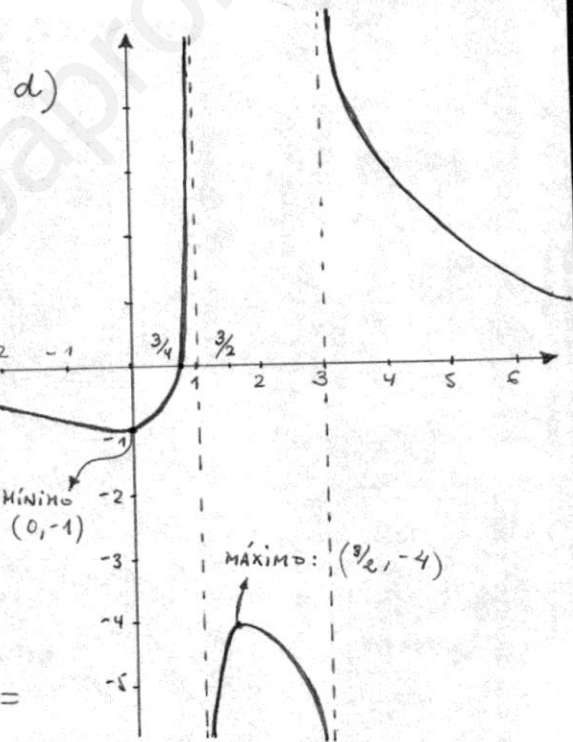
$$\text{c) } f'(x) = \frac{4(x^2-4x+3) - (4x-3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} =$$

$$= \frac{4x^2-16x+12-8x^2+16x+6x-12}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{x(-4x+6)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x \cdot (-4x+6)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\frac{3}{2} \text{ (posibles extremos)}$$



\* f tiene un MÁXIMO RELATIVO en  $x = \frac{3}{2} : (\frac{3}{2}, -4)$



\* f es ESTRICTAMENTE CRECIENTE en  $(0, 1) \cup (1, 3/2)$

\* f es ESTRICTAMENTE DECRECIENTE en  $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$

\* f tiene un MÍNIMO RELATIVO en  $x=0 : (0, -1)$ .